随机信号分析解题指南

李永庆　梅文博　编

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书是一本关于随机信号（随机过程）的基本理论和分析方法、例题及习题的汇编。

全书共分七章，主要内容有：概率论的基础知识，随机过程的基本理论，随机信号通过线性系统与非线性系统的理论及分析方法。各章皆由本章要点、基本内容与例解、习题三部分组成。其中基本内容概括了读者应掌握的基本概念、定义、定理、性质，并针对重要论点配上例题。在书末附有全部习题的答案。

为了便于读者自测综合掌握随机过程基本理论的程度，特设计了10份综合练习。

本书通俗易懂，概念清晰，适于电子工程等专业工科大学师生使用，也可供有关科技人员参考。

李永庆 梅文博 编

北京理工大学出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
地质出版社 印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本10.375印张 268千字
1990年12月第一版 1990年12月第一次印刷
ISBN 7-81013-381-0/TN·22
印数：1—4200册 定价：4.3

目　录

第一章　概率论

Ⅰ．本章要点 …… 1

Ⅱ．基本内容与例解 …… 1

一、概率简述 …… 1

二、随机变量及其概率分布 …… 6

三、多维随机变量及其概率分布 …… 8

四、随机变量函数的分布 …… 19

五、随机变量的数字特征 …… 25

六、随机变量的特征函数 …… 35

Ⅲ．习题 …… 39

第二章　随机过程

Ⅰ．本章要点 …… 52

Ⅱ．基本内容与例解 …… 52

一、随机过程的基本概念及其统计特性 …… 52

二、随机过程的微分与积分 …… 60

三、平稳随机过程和遍历过程 …… 63

四、随机过程的联合概率分布和互相关函数 …… 71

五、复随机过程 …… 74

六、离散时间随机过程 …… 79

七、正态随机过程 …… 81

Ⅲ．习题 …… 83

第三章　平稳随机过程的谱分析

Ⅰ．本章要点 …… 91

Ⅱ．基本内容与例解 …… 91

一、随机过程的谱分析 …… 91

二、平稳随机过程功率谱密度的性质 …… 94

三、平稳随机过程的功率谱密度与自相关函数之间的关系 …… 95

四、离散时间随机过程的功率谱密度 …… 98

五、互谱密度……101
六、白噪声……104
Ⅲ．习题……104
第四章　随机信号通过线性系统的分析
Ⅰ．本章要点……110
Ⅱ．基本内容与例解……111
一、线性系统输出-输入统计特性之间的关系……111
二、等效噪声带宽、平均功率和信噪比的计算……125
三、ARMA，MA和AR时间序列信号模型……136
四、线性系统输出端随机信号概率密度的计算……140
Ⅲ．习题……141
第五章　窄带随机过程
Ⅰ．本章要点……158
Ⅱ．基本内容与例解……158
一、希尔伯特变换、解析信号与解析过程……158
二、窄带随机过程……165
三、窄带高斯随机过程包络和相位的概率密度……179
Ⅲ．习题……180
第六章　随机信号通过非线性系统的分析
Ⅰ．本章要点……188
Ⅱ．基本内容与例解……188
一、无惰性非线性系统输出概率密度的计算……188
二、计算非线性系统输出统计特性的各种方法……195
三、非线性系统输出信噪比的计算……215
Ⅲ．习题……219
第七章　几种常用的随机过程
Ⅰ．本章要点……227
Ⅱ．基本内容与例解……227
一、马尔可夫过程……227
二、独立增量过程……243
三、独立随机过程……252
Ⅲ．习题……253
综合练习……259

习题答案……289
〔附录A〕 留数定理及其应用 …… 314
〔附录B〕 拉氏变换和Z变换的平方积分表 ……320
参考文献……322

第一章　概率论

Ⅰ．本章要点

在教材中，本章论及了概率论的基础知识，具体介绍了概率空间、条件概率空间，随机变量及其概率分布、随机变量函数的分布，随机变量的数字特征、特征函数等概念，它们是学习以后各章的理论工具。

本章的重点及其要求：(1) 随机变量函数的分布，关键是在各种函数变换条件下求出相应的雅可比因子 J。(2) 随机变量的数字特征，例如：数学期望、方差、各阶矩的定义和运算性质要熟练掌握；对于随机变量之间的统计独立、不相关、正交各应满足什么样的条件，三者的差别与联系等都要有明确的认识。(3) 随机变量特征函数的定义和性质，以及它与矩的关系，应该能灵活地运用。

Ⅱ．基本内容与例解

一、概率简述

(一) 概率的定义

1．概率的古典定义　事件 A 的概率的古典定义

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{中所含样本点数}}{S\text{中所含样本点数}} \tag{1.1}$$

式中 S 为样本空间，子集 $A\subset S$。

2．概率的几何定义　事件 A 的概率的几何定义

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{A\text{的量度}}{S\text{的量度}} \tag{1.2}$$

3．概率的统计定义　事件A的频率定义为

$$f_A^{(n)}=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{出现的次数}}{\text{试验的总次数}} \tag{1.3}$$

我们用事件A的频率近似表示事件A的概率，这就是概率的统计定义。

综述之，可给概率以如下的数学定义：规定一个试验的所有样本点之集合构成了样本空间S，在S中一个或若干个样本点的适当集合$\mathscr{F}$，称为事件域，$\mathscr{F}$中的每一集合称为事件。若$A\in\mathscr{F}$，则$P(A)$就是事件A的概率。并称这三个实体的结合$(S,\mathscr{F},P)$为一个概率空间。

（二）条件概率与概率的基本定理

1．条件概率的定义　在事件B已出现的条件下，事件A出现的条件概率为

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad P(B)>0 \tag{1.4}$$

或
$$P(A\cap B)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A) \tag{1.5}$$

2．全概率公式　设有N个互斥事件$B_n(n=1,2,\cdots,N)$，它们的和为整个S，即满足

$$B_i\cap B_j=\phi,\quad i\neq j=1,2,\cdots,N$$

$$\bigcup_{n=1}^{N}B_n=S$$

则
$$P(A)=\sum_{n=1}^{N}P(A|B_n)P(B_n) \tag{1.6}$$

此式称为全概率公式。

3．贝叶斯公式　将条件概率的公式推广到N个事件中去，可得

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{N}P(B_i)P(A|B_i)},\quad i=1,2,\cdots,N \tag{1.7}$$

这就是贝叶斯公式。

4．统计独立　如果事件A、B满足

$$P(A|B)=P(A) \tag{1.8}$$

或

$$P(B|A)=P(B) \tag{1.9}$$

则称这两个事件是统计独立的。并有

$$P(A\cap B)=P(A)P(B) \tag{1.10}$$

（三）例解

〔例1.1〕 有一根长为L的电话线BC如图1.1所示，在某一点D处被切断，现欲求点D与点B的距离不小于l的概率。

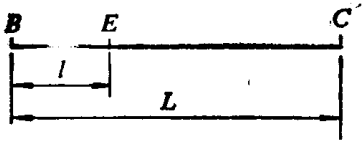


图 1.1　电话线示意图

解：设点E与点B的距离为l，求点D与点B的距离不小于l的概率，就相当于求点D落入EC间的概率。设点D落入EC间的事件为A，由式（1.2）可得所要求的概率为

$$P(A)=\frac{EC}{BC}=\frac{L-l}{L}=1-\frac{l}{L}$$

〔例1.2〕 某一基本的二元通信系统，由一部发射机和一部接收机组成，如图1.2所示。发射机经过信道向接收机发送两个符号0或1中的一个符号。信道偶然地会发生故障，使得当发送0时，接收为1，或反之，当发送1时，接收为0。

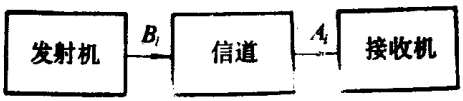


图 1.2　二元通信系统方框图

样本空间有两个元素（1或0），我们用$B_i(i=1,2)$分别表示事件“信道前符号为1”和“信道前符号为0”，用$A_i(i=1,2)$

分别表示事件“信道后符号为1”和“信道后符号为0”。若发送符号1和0的概率分别为0.6和0.4。

条件概率描述信道对所发送符号的影响，若各条件概率为

$$P(A_1|B_1)=P(A_2|B_2)=0.95$$

$$P(A_2|B_1)=P(A_1|B_2)=0.05$$

求：$P(A_1),P(A_2),P(B_1|A_1),P(B_2|A_1),P(B_1|A_2)$和$P(B_2|A_2)$。

解：在发射机发送符号1和0时，由于A_1和A_2为接收端仅有可能出现的两个互斥事件，故

$$P(A_1|B_i)+P(A_2|B_i)=1,\quad i=1,2$$

由全概率公式，可得到接收符号1和0的概率分别为

$$P(A_1)=P(A_1|B_1)P(B_1)+P(A_1|B_2)P(B_2)$$

$$=0.95\times0.6+0.05\times0.4=0.59$$

$$P(A_2)=P(A_2|B_1)P(B_1)+P(A_2|B_2)P(B_2)$$

$$=0.05\times0.6+0.95\times0.4=0.41$$

根据贝叶斯公式有

$$P(B_1|A_1)=\frac{P(A_1|B_1)P(B_1)}{P(A_1)}=\frac{0.95\times0.6}{0.59}\approx0.966$$

$$P(B_2|A_1)=\frac{P(A_1|B_2)P(B_2)}{P(A_1)}=\frac{0.05\times0.4}{0.59}\approx0.034$$

$$P(B_1|A_2)=\frac{P(A_2|B_1)P(B_1)}{P(A_2)}=\frac{0.05\times0.6}{0.41}\approx0.073$$

$$P(B_2|A_2)=\frac{P(A_2|B_2)P(B_2)}{P(A_2)}=\frac{0.95\times0.4}{0.41}\approx0.927$$

上述结果中，$P(B_1|A_2)$和$P(B_2|A_1)$是系统发生故障的概率，而$P(B_1|A_1)$和$P(B_2|A_2)$是系统正确传输符号的概率。

〔例1.3〕 在一只盒子中放有一百只电阻，其阻值和容许偏差如表1.1所示。现从该盒子中任取一只电阻，并设每只电阻被选中的可能性相等。定义三个事件：A为“抽一只47Ω的电阻”，B为“抽一只容许偏差是5%的电阻”，C为“抽一只100Ω的电阻”。试判断三事件A、B、C是否统计独立。

表 1.1 盒中的电阻数（已知阻值和容许偏差）

阻值 (Ω)	容许偏差		总计
	5%	10%	
22	10	14	24
47	28	16	44
100	24	8	32
总计	62	38	100

解：因为 $P(A\cap B)=\frac{28}{100}=0.28$

而 $P(A)P(B)=\frac{44}{100}\times\frac{62}{100}\approx 0.273$

故 $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

即：事件 A 与 B 不是统计独立的。

因为 $P(A\cap C)=0$

而 $P(A)P(C)=\frac{44}{100}\times\frac{32}{100}\approx 0.141$

故 $P(A\cap C)\neq P(A)P(C)$

即：事件 A 与 C 不是统计独立的。

因为 $P(B\cap C)=\frac{24}{100}=0.24$

而： $P(B)P(C)=\frac{62}{100}\times\frac{32}{100}\approx 0.198$

故： $P(B\cap C)\neq P(B)P(C)$

即 事件 B 与 C 不是统计独立的。

因为 $P(A\cap B\cap C)=0$

而 $P(A)P(B)P(C)=0.44\times 0.62\times 0.32\approx 0.087$

故 $P(A\cap B\cap C)\neq P(A)P(B)P(C)$

因此，事件 A、B、C 不是统计独立的，且它们两两也不统计独立。

二、随机变量及其概率分布

（一）随机变量的定义

设 $(S,\mathscr{F},P)$ 是一个概率空间，对于$s\in S$，$X(s)$ 是一个取实数值的单值函数。若对于任意实数 x_1，$\{s:X(s)<x_1\}$是一随机事件，亦即$\{s:X(s)<x_1\}\in\mathscr{F}$，则称$X(s)$为随机变量，并将它简记为$X$。

（二）离散型随机变量及其分布律

随机变量的全部可能取值是有限个或是可列无限多个，称之为离散型随机变量。

离散型随机变量X的概率分布或分布律定义为

$$P\{X=x_n\}=p_n,\quad n=1,2,\cdots \tag{1.11}$$

此X的概率分布表或分布列为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_n	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

显然，p_n满足

$$\begin{cases} p_n\geqslant 0,\quad n=1,2,\cdots \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n=1 \end{cases} \tag{1.12}$$

（三）连续型随机变量及其密度函数

对于随机变量X，若存在非负函数$f(x)$，且有$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x<\infty$，使$X$取值于任意区间 (a,b) 的概率为

$$P\{a<X<b\}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.13}$$

则称X为连续型随机变量；称$f(x)$为X的密度函数或概率密度，并有如下性质

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1 \end{cases} \tag{1.14}$$

（四）分布函数及其基本性质

1．分布函数　设X是定义在概率空间$(S,\mathscr{F},P)$上的一个随机变量，若$R_1=\{x:-\infty<x<\infty\}$，对于任意的$x\in R_1$，则$X$的分布函数定义为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\} \tag{1.15}$$

对于任意实数a、$b(a<b)$，有

$$P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a) \tag{1.16}$$

离散型随机变量的分布函数为

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}p_iU(x-x_i) \tag{1.17}$$

式中$U(x)$为单位阶跃函数；$p_i=P(x_i^+)-P(x_i^-)$。离散型随机变量的概率密度为

$$f(x)=\sum_i p_i\delta(x-x_i) \tag{1.18}$$

式中　$\delta(x)=\mathrm{d}U(x)/\mathrm{d}x$。

连续型随机变量的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)\mathrm{d}u,\quad x\in R_1 \tag{1.19}$$

若$F(x)$连续可微，则其概率密度为

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.20}$$

混合型随机变量的概率密度为

$$f(x)=b_1\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}+b_2\sum_i p_i\delta(x-x_i),\quad b_1\geqslant 0,\quad b_2\geqslant 0,\quad b_1+b_2=1 \tag{1.21}$$

2．分布函数$F(x)$的基本性质

（1）$0\leqslant F(x)\leqslant 1$

（2）$F(x)$为x的单调非降函数。

（3）$F(x)$是右连续的，即：$F(x+0)=F(x)$。

（4）若X的取值全部在区间(a,b)内，则当$x\leqslant a$时，

$F(x)=0$；当$x\geqslant b$时，$F(x)=1$。

三、多维随机变量及其概率分布

（一）二维概率分布及其基本性质

设X、Y为定义在同一概率空间$(S,\mathscr{F},P)$上的两个随机变量，则(X,Y)称为二维随机变量，其联合分布函数为

$$F_{XY}(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\},\quad x,y\in R_1 \tag{1.22}$$

$F_{XY}(x,y)$的基本性质如下：

（1）$0\leqslant F_{XY}(x,y)\leqslant 1$

（2）$F_{XY}(x,y)$为变量x或y的单调非降函数。

（3）$F_{XY}(x,y)$对变量x或y为右连续。

（4）对任意(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$x_1<x_2$，$y_1<y_2$，有

$$F_{XY}(x_2,y_2)-F_{XY}(x_2,y_1)+F_{XY}(x_1,y_1)-F_{XY}(x_1,y_2)\geqslant 0$$

若二维随机变量(X,Y)的所有可能取值为有限对或可列无限对时，则称(X,Y)为二维离散随机变量，其概率分布或分布律定义为

$$P\{(X,Y)=(x_i,y_j)\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots \tag{1.23}$$

同样，也可列表表示其取值的概率分布情况。显然，p_{ij}具有如下性质：

$$p_{ij}\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1,\quad i,j=1,2,\cdots \tag{1.24}$$

二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F_{XY}(x,y)=\sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y}p_{ij} \tag{1.25}$$

对于(X,Y)的联合分布函数$F_{XY}(x,y)$，若存在非负的函数$f_{XY}(x,y)$，使对任意的$x,y\in R_1$，有

$$F_{XY}(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f_{XY}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{1.26}$$

则称(X,Y)为连续型的二维随机变量，称$f_{XY}(x,y)$为该(X,Y)的联合概率密度。$f_{XY}(x,y)$有如下性质：

（1）$f_{XY}(x,y)\geqslant 0$

（2）$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$

（3）若$f_{XY}(x,y)$在点(x,y)处连续，则有

$$\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\partial y}=f_{XY}(x,y)$$

（4）设G是xoy平面上一个区域，点(X,Y)落在G内的概率为

$$P\{X,Y)\{G\}=\iint_G f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

（二）边沿分布

二维随机变量(X,Y)具有联合分布函数$F_{XY}(x,y)$，而随机变量X、Y各自具有分布函数$F_X(x)$、$F_Y(y)$，称$F_X(x)$、$F_Y(y)$为该(X,Y)关于X、Y的边沿分布函数。边沿分布函数可由联合分布函数来确定

$$\begin{cases}F_{XY}(x,\infty)=F_X(x)\\ F_{XY}(\infty,y)=F_Y(y)\end{cases}\tag{1.27}$$

对于连续型随机变量(X,Y)，可分别得到(X,Y)关于X、Y的边沿概率密度

$$\begin{cases}f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y\\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\end{cases}\tag{1.28}$$

对于概率函数$p_{ij}=p(i,j)=P\{X=x_i,Y=y_j\}$的二维离散型随机变量$(X,Y)$，则有

$$\begin{cases}p(i,\cdot)=\sum_{j=1}^{\infty}p(i,j)=P\{X=x_i\}=P_X(x_i),\ i=1,2,\cdots\\ p(\cdot,j)=\sum_{i=1}^{\infty}p(i,j)=P\{Y=y_j\}=P_Y(y_j),\ j=1,2,\cdots\end{cases}\tag{1.29}$$

分别称$p(i,\cdot)=P_X(x_i)$、$p(\cdot,j)=P_Y(y_j)$为(X,Y)关于X、Y的边沿概率函数。

（三）相互独立的随机变量与条件分布

1．相互独立的随机变量　设X、Y为两个随机变量，若有

$$F_{XY}(x,y)=F_X(x)F_Y(y),\quad x,y\in R_1 \tag{1.30}$$

则称X、Y为相互独立的随机变量。

当(X,Y)为离散型或连续型随机变量时，X与Y相互独立的条件式(1.30)等价为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\} \tag{1.31}$$

或

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \tag{1.32}$$

2．条件分布　在条件B下，随机变量X的条件分布函数定义为

$$F_{X|B}(x|B)=P\{X\leqslant x|B\}=\frac{P\{X\leqslant x\cap B\}}{P(B)} \tag{1.33}$$

对于连续型随机变量，其条件概率密度为

$$f_{X|B}(x|B)=\frac{\mathrm{d}F_{X|B}(x|B)}{\mathrm{d}x} \tag{1.34}$$

若事件$B=\{y-\Delta y<Y\leqslant y+\Delta y\}$（$\Delta y$很小，几乎趋于0），则有

$$F_{X|B}(x|y-\Delta y<Y\leqslant y+\Delta y)=\frac{\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y}\int_{-\infty}^{x}f_{XY}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y}f_Y(v)\mathrm{d}v} \tag{1.35}$$

上式中，若X、Y为离散型随机变量，且与数值$x_i(i=1,2,\cdots,N)$、$y_j(j=1,2,\cdots,M)$对应的概率为$P(x_i)$、$P(y_j)$，则有

$$f_Y(y)=\sum_{j=1}^{M}P(y_j)\delta(y-y_j) \tag{1.36}$$

$$f_{XY}(x,y)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}P(x_i,y_j)\delta(x-x_i)\delta(y-y_j)$$

(1.37)

假设式（1.35）中Y只取y_k，便得到

$$F_{X|Y}(x|Y=y_k)=\sum_{i=1}^{N}\frac{P(x_i,y_k)}{P(y_k)}U(x-x_i) \quad (1.38)$$

$$f_{X|Y}(x|Y=y_k)=\sum_{i=1}^{N}\frac{P(x_i,y_k)}{P(y_k)}\delta(x-x_i) \quad (1.39)$$

式（1.35）中，若X、Y为连续型随机变量，且$\Delta y\to 0$，则有

$$F_{X|Y}(x|Y=y)=\frac{\int_{-\infty}^{x}f_{XY}(u,y)\mathrm{d}u}{f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(u|y)\mathrm{d}u \quad (1.40)$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \quad (1.41)$$

同理，可得

$$F_{Y|X}(y|X=x)=\frac{\int_{-\infty}^{y}f_{XY}(x,v)\mathrm{d}v}{f_X(x)}=\int_{-\infty}^{y}f_{Y|X}(v|x)\mathrm{d}v \quad (1.42)$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \quad (1.43)$$

若两个连续随机变量X、Y互为独立，则有

$$f_{X|Y}(x|y)=f_X(x) \quad 或 \quad f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)$$

（四）多维随机变量及其概率分布

我们称n个随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$的总体$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为$n$维随机变量。此$\boldsymbol{X}$的分布函数和概率密度分别为

$$F_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n\} \quad (1.44)$$

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial^n F_{\boldsymbol{X}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n} \quad (1.45)$$

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$关于X_i的边沿分布函数和边沿概率密度分别为

$$F_{X_i}(x_i) = P\{X_i \leqslant x_i\} = F_X(\infty, \cdots, \infty, x_i, \infty, \cdots, \infty) \tag{1.46}$$

$$f_{X_i}(x_i) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1个} f_X(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) \times \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{i-1} \mathrm{d}x_{i+1} \cdots \mathrm{d}x_n \tag{1.47}$$

若对于任意的实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$，有

$$F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n) \tag{1.48}$$

则称$X_1, X_2, \cdots, X_n$为相互独立的随机变量。

（五）多维正态概率密度的矩阵表示法

若二维正态随机变量(X_1, X_2)的概率密度为

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sigma_{X_1} \sigma_{X_2} \sqrt{1-\gamma^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\gamma^2)} \times \left[\frac{(x_1 - m_{X_1})^2}{\sigma_{X_1}^2} - \frac{2\gamma (x_1 - m_{X_1})(x_2 - m_{X_2})}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} + \frac{(x_2 - m_{X_2})^2}{\sigma_{X_2}^2} \right] \right\}$$

则其矩阵表达式为

$$f_X(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi |\boldsymbol{K}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_X)^T \boldsymbol{K}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_X)}{2} \right] \tag{1.49}$$

式中 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$；$\boldsymbol{x}^T = [x_1 \quad x_2]$；$\boldsymbol{m}_X = \begin{bmatrix} m_{X_1} \\ m_{X_2} \end{bmatrix}$；

$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_X)^T$为列矩阵$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_X)$的转置矩阵；

$\boldsymbol{K}$为协方差阵，即

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} E[(X_1 - m_{X_1})^2] & E[(X_1 - m_{X_1})(X_2 - m_{X_2})] \\ E[(X_2 - m_{X_2})(X_1 - m_{X_1})] & E[(X_2 - m_{X_2})^2] \end{bmatrix}$$

$|\boldsymbol{K}|$为$\boldsymbol{K}$的行列式；$\boldsymbol{K}^{-1}$为$\boldsymbol{K}$的逆矩阵。

在n维正态随机变量的情况下，定义

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{m}_X = \begin{bmatrix} m_{X_1} \\ m_{X_2} \\ \vdots \\ m_{Xn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} E[(X_1-m_{X_1})^2] & \cdots E[(X_1-m_{X_1})(X_n-m_{X_n})] \\ \vdots & \vdots \\ E[(X_n-m_{X_n})(X_1-m_{X_1})]\cdots & E[(X_n-m_{X_n})^2] \end{bmatrix}$$

于是，其概率密度矩阵表达式为

$$f_X(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\boldsymbol{K}|^{1/2}}\exp\left[-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_X)^T\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_X)}{2}\right] \tag{1.50}$$

不难证明，若n个正态随机变量是互不相关的，则它们也是统计独立的。

（六）例解

〔例1.4〕 给定的通信系统通过某一线路传送二元（如：0与1)数码。为方便起见，数码流被分成段(称为字)，每个字由相连接的4个数码组成。实践证明：此线路传送的各个数码皆互为独立的，且每个数码是等可能地取0或1。现在，线路接收机记下在每个字头两位数码出现1的个数及每个字中出现1的总数。设头两位数码中1的个数用随机变量N_2表示，每个字中1的总数用随机变量N_4示之。

（1）描述一个能定义N_2与N_4的基本样本空间S。

（2）确定区域样本空间S_X与S_Y；并求出这些空间上的概率分布。

设$\boldsymbol{N}$为向量$\boldsymbol{N}(s)=(N_4(s),\ N_2(s))$，其中$s$是$S$的任一样本点。

（3）确定向量$\boldsymbol{N}$的范围R_N。

（4）确定由$\boldsymbol{N}$在R_N上导出的概率分布，并列表示之。

解：（1）对于基本样本空间S，我们列出所有可能出现的四码“字”如表1.2。

因为每个数码是等可能地取0或1，故所有16个可能的“字”皆为等概率的，即：其中某一个字出现的概率为$\frac{1}{16}$。

（2）对于N_2，有$R_{N_2}=\{0,1,2\}$。

因为16个“字”中的4个具有$N_2=0$的属性，故

表1.2

"字"	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
N_2	0	0	0	0	1	1	1	1
N_4	0	1	1	2	1	2	2	3
"字"	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
N_2	1	1	1	1	2	2	2	2
N_4	1	2	2	3	2	3	3	4

$$P\{N_2=0\}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

同理

$$P\{N_2=1\}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

$$P\{N_2=2\}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

对于N_4，有$R_{N_4}=\{0,1,2,3,4\}$

$$P\{N_4=0\}=\frac{1}{16}$$

$$P\{N_4=1\}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

$$P\{N_4=2\}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

$$P\{N_4=3\}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

$$P\{N_4=4\}=\frac{1}{16}$$

（3）现定义

$$\boldsymbol{N}(s)=(N_4(s),\ N_2(s))$$

于是 $R_N=\{(x,y):x=N_4(s),\ y=N_2(s)\text{及}\ s\in S\}$

$$=\{(0,0),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(2,2),$$
$$(3,1),(3,2),(4,2)\}$$

（4）通过计算S上具有所要求属性的样本点的数目，很容易由$\boldsymbol{N}$在R_N上导出概率分布。因为16个字中有1个“字”同时具有$N_4=0$与$N_2=0$的属性，故

$$P\{\boldsymbol{N}=(0,0)\}=\frac{1}{16}$$

同理

$$P\{\boldsymbol{N}=(1,0)\}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

$$P\{\boldsymbol{N}=(1,1)\}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

$$P\{\boldsymbol{N}=(2,0)\}=\frac{1}{16}$$

$$P\{\boldsymbol{N}=(2,1)\}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

$$P\{\boldsymbol{N}=(2,2)\}=\frac{1}{16}$$

$$P\{\boldsymbol{N}=(3,1)\}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

$$P\{\boldsymbol{N}=(3,2)\}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

$$P\{\boldsymbol{N}=(4,2)\}=\frac{1}{16}$$

最后，可列成表1.3。

〔**例 1.5**〕 甲、乙两列火车在〔0,60〕分钟内的某个时刻到达车站，并分别停留3、6分钟。在此时间间隔内的任意时刻，两列车是等可能到达的，且它们到达的时刻互不相关。设随机变量X、Y分别为甲、乙列火车的到达时刻，则它们的二维概率密度为

表1.3

$P(N)$ N_1 / N_2	0	1	2	3	4
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	0	0
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
2	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3600}, & 0\leqslant x\leqslant 60,\ 0\leqslant y\leqslant 60\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

试求：(1)联合分布函数$F_{XY}(x,y)$；(2)边沿分布函数$F_X(x)$、$F_Y(y)$及边沿概率密度$f_X(x)$、$f_Y(y)$；(3)甲列火车在30分钟之前到站的概率；(4)乙列火车在39～45分钟时在站内的概率；(5)甲列火车在乙列火车之前到达的概率。

解：本例题所涉及的是连续型二维随机变量问题。

（1）对已知的二维概率密度积分（务必注意积分限）便可得到联合分布函数。因为

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3600}, & 0\leqslant x\leqslant 60,\ 0\leqslant y\leqslant 60\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

故

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\text{或}y\leqslant 0\\ \displaystyle\int_0^y\int_0^x\frac{1}{3600}\,du\,dv=\frac{xy}{3600}, & 0\leqslant x\leqslant 60,\ 0\leqslant y\leqslant 60\\ \displaystyle\int_0^{60}\int_0^x\frac{1}{3600}\,du\,dv=\frac{x}{60}, & 0\leqslant x\leqslant 60,\ y\geqslant 60\\ \displaystyle\int_0^y\int_0^{60}\frac{1}{3600}\,du\,dv=\frac{y}{60}, & x\geqslant 60,\ 0\leqslant y\leqslant 60\\ 1, & x\geqslant 60,\ y\geqslant 60\end{cases}$$

（2）边沿分布函数为

$$F_X(x)=F_{XY}(x,\infty)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \dfrac{x}{60}, & 0\leqslant x\leqslant 60\\ 1, & x\geqslant 60\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F_{XY}(\infty,y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0\\ \dfrac{y}{60}, & 0\leqslant y\leqslant 60\\ 1, & y\geqslant 60\end{cases}$$

对上二式微分，便能得到边沿概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0\leqslant x\leqslant 60\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0\leqslant y\leqslant 60\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（3）设A为甲列火车在30分钟之前到达的事件，其概率为

$$P(A)=P\{X<30\}=\int_0^{30} f_X(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

（4）设B为乙列火车在39～45分时在车站内的事件，其概率为

$$P(B)=P\{39\leqslant Y\leqslant 45\}=\int_{39}^{45} f_Y(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{10}$$

（5）设C为甲列火车在乙列火车之前到达的事件，其概率为

$$P(C)=P\{X<Y\}=\int_0^{60}\mathrm{d}x\int_x^{60}\frac{1}{3600}\mathrm{d}y=\int_0^{60}\frac{60-x}{3600}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

注意：由于两列车到达时刻是对称的，因此，凭观察就能得出$P(C)=\frac{1}{2}$。

〔例 1.6〕 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)\right]$$

试求：（1）边沿概率密度 $f_X(x)$、$f_Y(y)$；（2）条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$、$f_{Y|X}(y|x)$。

解：(1)求随机变量X的边沿概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{x^2/10}\sqrt{\frac{2}{5}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}y+\sqrt{\frac{1}{10}}x\right)^2\right\}$$

$$\times\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}y+\sqrt{\frac{1}{10}}x\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{5\pi}}\mathrm{e}^{-0.4x^2}\quad\left(\text{应用公式}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}\right)$$

随机变量Y的边沿概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-5y^2/2}\mathrm{e}^{y^2/2}\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x+\sqrt{\frac{1}{2}}y\right)^2\right\}$$

$$\times\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}x+\sqrt{\frac{1}{2}}y\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-2y^2}$$

（2）求条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)\right]}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-2y^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.5(x+y)^2}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)\right]}{\sqrt{\frac{2}{5\pi}}e^{-0.4x^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{5}{2\pi}}e^{-0.1(x+5y)^2}$$

四、随机变量函数的分布

定义在$(S, \mathscr{F}, P)$上的随机变量X，其函数$Y=g(X)$可看成是从样本空间S_X到值域空间的影射，那末，$g(X)$也是$(S, \mathscr{F}, P)$上的随机变量，并称$g(X)$为随机变量X的函数。此时，随机变量Y的分布函数可写成

$$F_Y(y)=P\{[X:g(x)\leqslant y,\ x\in S_X]\} \tag{1.51}$$

若上式对y处处连续可微，则Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}P\{[X:g(x)\leqslant y,\ x\in S_X]\} \tag{1.52}$$

（一）单个随机变量函数的分布

若$Y=g(X)$是离散型随机变量X的函数，即：不同的X值对应着不同的Y值，那末，X与Y取对应值的概率是相同的：$P\{Y=y_i\}=P\{X=x_i\}$。

如果X为连续型随机变量，其概率密度为$f_X(x)$；而$y=g(x)$可微且为单调函数，其反函数$x=h(y)$也是单调的。这时，$Y=g(X)$的概率密度为

$$f_Y(y)=f_X[h(y)]|h'(y)| \tag{1.53}$$

如果$y=g(x)$不是单调函数，它的反函数$x=h(y)$也是非单调的，并设一个Y值对应着两个X值$(x_1=h_1(y),\ x_2=h_2(y))$，则$Y=g(X)$的概率密度为

$$f_Y(y)=f_X[h_1(y)]|h_1'(y)|+f_X[h_2(y)]|h_2'(y)| \tag{1.54}$$

更为复杂的情况是：一个Y值对应着多个X值，那末，可将

上式作进一步推广，得到

$$f_Y(y)|\mathrm{d}y| = f_X(x_1)|\mathrm{d}x_1| + f_X(x_2)|\mathrm{d}x_2| + f_X(x_3)|\mathrm{d}x_3| + \cdots \tag{1.55}$$

（二）二维随机变量函数的分布

设二维随机变量(X_1, X_2)具有联合概率密度$f_{X_1X_2}(x_1, x_2)$，现需求出新的随机变量

$$\begin{cases} Y_1 = g_1(X_1, X_2) \\ Y_2 = g_2(X_1, X_2) \end{cases} \tag{1.56}$$

的联合概率密度$f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2)$。若反变换函数

$$\begin{cases} X_1 = h_1(Y_1, Y_2) \\ X_2 = h_2(Y_1, Y_2) \end{cases} \tag{1.57}$$

是唯一的确定，即(X_1, X_2)与(Y_1, Y_2)为单值变换，则有

$$f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) = |J| f_{X_1X_2}[h_1(y_1, y_2),\ h_2(y_1, y_2)] \tag{1.58}$$

式中雅可比因子

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

设两个随机变量X与Y具有联合概率密度$f_{XY}(x, y)$，我们借助于二维随机变量的变换，可得X与Y的和、差、积、商Z的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x)\mathrm{d}x, \quad z = x + y \tag{1.59}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z+x)\mathrm{d}x, \quad z = y - x \tag{1.60}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}\left(x, \frac{z}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{|x|}, \quad z = xy \tag{1.61}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{XY}(x, zx)\mathrm{d}x, \quad z = \frac{y}{x} \tag{1.62}$$

若随机变量X与Y统计独立，则有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x,\quad z=x+y \tag{1.63}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z+x)\mathrm{d}x,\quad z=y-x \tag{1.64}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x,\quad z=xy \tag{1.65}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)f_Y(zx)\mathrm{d}x,\quad z=\frac{y}{x} \tag{1.66}$$

式（1.63）常称之为分布律的卷积。

（三）n维随机变量函数的分布

设n维随机向量$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$具有联合概率密度$f_X(\boldsymbol{x})=f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。令$g(\cdot)$为一一对应的连续可微的向量变换，它将$\boldsymbol{X}$映射为一新的$n$维随机向量$\boldsymbol{Y}=g(\boldsymbol{X})$，若其逆变换$\boldsymbol{X}=h(\boldsymbol{Y})$，则有

$$f_Y(\boldsymbol{y})=|J|f_X[h(\boldsymbol{y})] \tag{1.67}$$

式中

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial y_1} & \frac{\partial h_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

（四）例解

〔**例1.7**〕 已知离散型随机变量X的分布律为

X	1	3	5
p_n	0.2	0.5	0.3

求离散型随机变量$Y=2X$的分布律。

解：求随机变量$Y=2X$的所有可能取值，得

$$y_1=2\times1=2,\quad y_2=2\times3=6,\quad y_3=2\times5=10$$

显然，因为函数$y=g(x)=2x$单调，故不同的X值对应着不同的

Y 值，于是，不难求得随机变量 Y 的分布律

$$P\{Y=2\}=P\{X=1\}=0.2$$
$$P\{Y=6\}=P\{X=3\}=0.5$$
$$P\{Y=10\}=P\{X=5\}=0.3$$

也可列表如下：

Y	2	6	10
p_n	0.2	0.5	0.3

〔例1.8〕 设随机变量 Y 与 X 之间为线性关系 $Y=aX+b$，a、b 为常数，且 $a\neq 0$。已知随机变量 X 为正态分布，即

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X}\exp\left[-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right]$$

求随机变量 Y 的概率密度。

解：先找出随机变量 X 与 Y 之间的反函数关系 $X=h(Y)=\dfrac{Y-b}{a}$

并求
$$|h(y)|=\frac{1}{|a|}$$

然后，由式（1.53）可得

$$f_Y(y)=f_X[h(y)]|h(y)|=f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|a|\sigma_X}\exp\left[-\frac{[y-(am_X+b)]^2}{2a^2\sigma_X^2}\right]$$

上式说明，正态随机变量 X 的线性函数 Y 也是正态分布的随机变量，Y 的均值为 am_X+b、方差为 $a^2\sigma_X^2$。

〔例 1.9〕 设离散型随机变量 X 的分布律为

X	-1	-2	1	2
p_n	0.3	0.1	0.2	0.4

求随机变量 $Y=X^2$ 的分布律。

解：求 Y 的可能取值

$$y_1=x_1^2=(-1)^2=1,\quad y_2=x_2^2=(-2)^2=4$$
$$y_3=x_3^2=1^2=1,\quad y_4=x_4^2=2^2=4$$

于是，不同的X值对应着相同的Y值，这是因为X在其范围内取值时，函数$y=x^2$为非单调的，例如对应于$Y=1$的值有两个X值：$X=-1$和$X=1$。故有

$$P\{Y=1\}=P\{X=-1\}+P\{X=1\}=0.3+0.2=0.5$$

同理 $P\{Y=4\}=P\{X=-2\}+P\{X=2\}=0.1+0.4=0.5$

所以，随机变量Y的分布律为

Y	1	4
p_n	0.5	0.5

〔例 1.10〕 设随机变量X在$(0,2\pi)$上均匀分布，即其概率密度（图1.3(a)）为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0<x<2\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求随机变量$Y=\cos X$的概率密度。

解：从$y=\cos x$求得反函数$x=\arccos y$。因为$y=\cos x$在$(0,2\pi)$上不是单调函数，但是，它分别在$(0,\pi)$和$(\pi,2\pi)$上为单调函数（图1.3(b)）。在$(0,\pi)$上，其反函数为$x_1=\arccos y$；在$(\pi,2\pi)$上，反函数为$x_2=2\pi-\arccos y$。由式（1.54），可得随机变量Y的概率密度为

$$f_Y(y=f_X(x_1)\left|\frac{dx_1}{dy}\right|+f_X(x_2)\left|\frac{dx_2}{dy}\right|$$

其中

$$\frac{dx_1}{dy}=(\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\frac{dx_2}{dy}=(2\pi-\arccos y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$f_X(x_1)=f_X(x_2)=\frac{1}{2\pi}$$

故Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}\left|-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right|+\frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right|$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

如图1.3(c)所示。

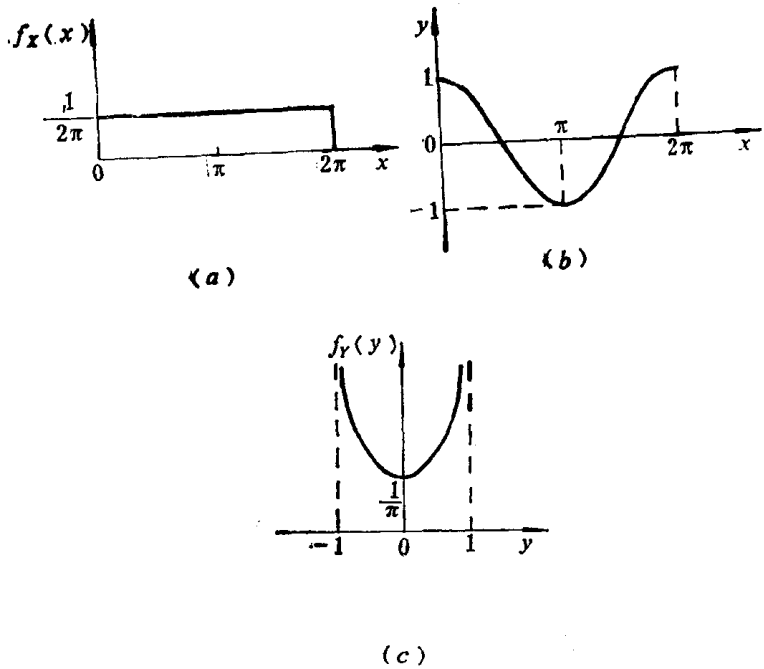


图 1.3 随机相位均匀分布的余弦变换的概率密度图形

〔例 1.11〕设随机变量X、Y为正态分布，其二维概率密度为

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_X^2}-\frac{2rxy}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{y^2}{\sigma_Y^2}\right)\right]$$

求随机变量$Z=\frac{X}{Y}$的概率密度。

解： 令$z_1=x$，$z_2=\frac{x}{y}=z$

其反函数为 $x=z_1$，$y=\frac{x}{z_2}=\frac{z_1}{z}$

可求得

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial h_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial z_2}\\ \dfrac{\partial h_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial h_2}{\partial z_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \dfrac{1}{z} & -\dfrac{z_1}{z_2^2}\end{vmatrix}=-\frac{z_1}{z_2^2}=-\frac{z_1}{z^2}$$

故 $$f_{Z_1Z_2}(z_1,z_2)=|J|f_{XY}(x,y)=\frac{|z_1|}{z_2^2}f_{XY}\left(z_1,\frac{z_1}{z}\right)$$

因此 $$f_Z(z)=f_{Z_2}(z_2)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{Z_1Z_2}(z_1,z_2)\mathrm{d}z_1$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}\left(z_1,\frac{z_1}{z}\right)\frac{|z_1|}{z^2}\mathrm{d}z_1=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}\left(x,\frac{x}{z}\right)\frac{|x|}{z^2}\mathrm{d}x$$

将$f_{XY}(x,y)$代入上式得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{2\pi\sigma_X\sigma_Yz^2\sqrt{1-\gamma^2}}\exp\left[-\frac{x^2}{2(1-\gamma^2)}\left(\frac{1}{\sigma_X^2}-\frac{2\gamma}{z\sigma_X\sigma_Y}+\frac{1}{z^2\sigma_Y^2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{1-\gamma^2}\,\sigma_X\sigma_Y}{\pi[\sigma_Y^2(z-\gamma\sigma_X/\sigma_Y)^2+\sigma_X^2(1-\gamma^2)]}$$

五、随机变量的数字特征

（一）随机变量的数学期望（或均值）

离散随机变量X的数学期望定义为

$$E[X]=\sum_{k=1}^{\infty}x_kP\{X=x_k\} \tag{1.68}$$

连续随机变量X的数学期望定义为

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x \tag{1.69}$$

当使用δ函数表示离散或混合随机变量的概率密度时，式(1.69)的定义便适用于所有随机变量。

（二）随机变量函数的数学期望

设随机变量X的函数为$Y=g(X)$，若X为离散或连续随机变量，则Y的数学期望为

$$E[Y]=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)P\{X=x_k\} \tag{1.70}$$

或

$$E[Y]=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\mathrm{d}x \tag{1.71}$$

同样，引用δ函数表示离散随机变量的概率密度后，式(1.71)对所有随机变量皆适用。

对于多维随机变量，我们可用随机向量示之，即

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Y}=g(\boldsymbol{X})$$

则有

$$E[\boldsymbol{Y}]=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n\text{个}} g(\boldsymbol{x})f_X(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.72}$$

数学期望有下列重要性质：

（1）若$Y=aX_1\pm bX_2$（a、b皆为常数），则有

$$E[Y]=aE[X_1]\pm bE[X_2] \tag{1.73}$$

称之为数学期望的加（或减）法定理。推广之，有

$$\left[E\sum_{i=1}^{n} a_iX_i\right]=\sum_{i=1}^{n} a_iE[X_i],\ a_i\text{为常数} \tag{1.74}$$

（2）若$Y=g(X_1)g(X_2)$，且X_1与X_2统计独立，则有

$$E[Y]=E[g(X_1)]E[g(X_2)] \tag{1.75}$$

（3）一般而言

$$E[g(X)]\neq g(E[X]) \tag{1.76}$$

（三）条件数学期望

对于二维离散随机向量(X,Y)，定义

$$E[Y|X=x_i]=\sum_j y_j P[Y=y_j|X=x_i] \tag{1.77}$$

为随机变量Y在$X=x_i$条件下的条件数学期望。因此，Y的非条件均值为

$$E[Y]=\sum_i E[Y|X=x_i]P\{X=x_i\} \tag{1.78}$$

对于二维连续随机向量(X,Y)，定义

$$E[Y|X=x]=\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y \tag{1.79}$$

为Y在$X=x$时的条件数学期望。并有

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{\infty} E[Y|X=x]f_X(x)\mathrm{d}x \tag{1.80}$$

若X为离散随机变量，Y为连续随机变量，则我们定义

$$E[Y|X=x_j]=\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|X=x_j)\mathrm{d}y \tag{1.81}$$

由此可得

$$E[Y]=\sum_j E[Y|X=x_j]P\{X=x_j\} \tag{1.82}$$

条件期望有如下性质：

（1）当随机变量X与Y相互独立时，有

$$E[Y|X]=E[Y]$$

（2）$E[X]=E[E[X|Y]]$

（3）$E[g(Y)X|Y]=g(Y)E[X|Y]$

（4）$E[g(Y)X]=E[g(Y)E[X|Y]]$

（5）$E[c|Y]=c$（c为常数）

（6）$E[g(Y)|Y]=g(Y)$

（7）$E[(aX+bY)|Z]=aE[X|Z]+bE[Y|Z]$

（a、b皆为常数）

（8） $$E\{[X-E[X|Y]]^2\}\leqslant E\{[X-g(Y)]^2\}$$

（四）随机变量的各阶矩

离散和连续随机变量X的k阶原点矩分别为

$$m_k=E[X^k]=\sum_{i=1}^{n}x_i^kP\{X=x_i\} \tag{1.83}$$

$$m_k=E[X^k]=\int_{-\infty}^{\infty}x^kf_X(x)\mathrm{d}x \tag{1.84}$$

它们的k阶中心矩分别为

$$\mu_k=E[(X-E[X])^k]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E[X_i])^kP\{X=x_i\} \tag{1.85}$$

$$\mu_k=E[(X-E[X])^k]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^kf_X(x)\mathrm{d}x \tag{1.86}$$

中心矩与原点矩有下述关系

$$\mu_n=E[(X-E[X])^n]=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}m_1^{(n-k)}m_k \tag{1.87}$$

$$\begin{aligned}m_n=E[X^n]&=E[[(X-m_1)+m_1]^n]\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m_1^k\mu_{n-k}\end{aligned} \tag{1.88}$$

离散和连续的二维随机变量(X,Y)的$(j+k)$阶联合（原点）矩m_{jk}（j、k皆为正整数）分别定义为

$$m_{jk}=E[X^jY^k]=\sum_i\sum_n x_i^jy_n^kP\{X=x_i,\ Y=y_n\} \tag{1.89}$$

$$m_{jk}=E[X^jY^k]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^jy^kf_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.90}$$

特别有

$$m_{j0}=E[X^j],\quad m_{10}=E[X]=m_X$$
$$m_{0k}=E[Y^k],\quad m_{01}=E[Y]=m_Y$$

它们的$(j+k)$阶联合中心矩μ_{jk}分别定义为

$$\mu_{jk}=E[(X-m_X)^j(Y-m_Y)^k]$$

$$=\sum_i\sum_n(x_i-m_{X_i})^j(y_n-m_{Y_n})^kP\{X=x_i,\ Y=y_n\} \quad (1.91)$$

$$\mu_{jk}=E[(X-m_X)^j(Y-m_Y)^k]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_X)^j(y-m_Y)^kf_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (1.92)$$

显然，有

$$\mu_{10}=E[X-m_X]=0,\qquad \mu_{01}=E[Y-m_Y]=0$$

$$\mu_{20}=E[(X-m_X)^2]=D[X]=\sigma_X^2,$$

$$\mu_{02}=E[(Y-m_Y)^2]=D[Y]=\sigma_Y^2$$

而二阶混合中心矩

$$\mu_{11}=K_{XY}=E[(X-m_X)(Y-m_Y)]=E[XY]-m_Xm_Y \quad (1.93)$$

又称为随机变量X与Y的协方差。

X与Y的相关系数（或归一化协方差）定义为

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \quad (1.94)$$

显然，$|r_{XY}|\leqslant 1$；$|r_{XY}|=1$的充要条件是X与Y依概率1线性相关，即：$P\{Y=aX+b\}=1$（a、b皆为常数）。

若随机变量X与Y的联合矩

$$E[X^jY^k]=E[X^j]E[Y^k] \quad (1.95)$$

则X与Y统计独立。

如果X与Y统计独立，则必有$K_{XY}=0$（或$r_{XY}=0$），亦即

$$E[XY]=E[X]E[Y] \quad (1.96)$$

此时，X与Y是不相关的。反之，则不然。但是，对于两个正态随机变量，不相关与统计独立是等价的。

若随机变量X与Y的二阶矩

$$E[XY]=0 \quad (1.97)$$

或

$$K_{XY}=-E[X]E[Y] \quad (1.98)$$

则称X与Y正交。如果两个随机变量正交，且至少有一个随机变

量的均值为零，则有$K_{XY}=0$，这时，正交与不相关是一致的。

（五）例解

〔**例1.12**〕 已知随机变量X的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \dfrac{x}{4}, & 0<x\leqslant 4\\ 1, & x>4\end{cases}$$

求X的数学期望。

解：因为随机变量X的概率密度为

$$f_X(x)=\frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{4}, & 0<x\leqslant 4\\ 0, & x>4\end{cases}$$

所以，X的数学期望为

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^4 \frac{x}{4}\mathrm{d}x=2$$

〔**例1.13**〕 设离散型随机变量X的可能取值为$\{-1, 0, 1, 2\}$，取每个值的概率均为1/4。又设随机变量Y为

$$Y=g(X)=X^3-X$$

（1）确定随机变量Y的可能取值；

（2）确定Y的概率分布；

（3）分别用公式 $E[Y]=\sum_k y_k P\{Y=y_k\}$ 与 $E[Y]=E[g(X)]=\sum_k g(x_k)P\{X=x_k\}$求$E[Y]$，并比较结果。

解：（1）因为$Y=g(X)=X^3-X$，在$X=-1$时，便有$Y=0$；$X=0$时，$Y=0$；$X=1$时，$Y=0$；$X=2$时，$Y=6$。故随机变量Y的取值为0和6。

（2）Y的概率分布为

$$P\{Y=0\}=P\{X=-1\}+P\{X=0\}+P\{X=1\}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$P\{Y=6\}=P\{X=2\}=\frac{1}{4}$$

（3）由于

$$E[Y]=\sum_k y_k P\{Y=y_k\}=0\times\frac{3}{4}+6\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

$$E[Y]=E[g(X)]=\sum_k g(x_k)P\{X=x_k\}$$

$$=\sum_k (x_k^3-x_k)P\{X=x_k\}$$

$$=[(-1)^3-(-1)]\times\frac{1}{4}+[0^3-0]\times\frac{1}{4}$$

$$+[1^3-1]\times\frac{1}{4}+[2^3-2]\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{3}{2}$$

因此，两式运算结果完全相同。

〔例1.14〕 设随机变量T为某电子元件的失效时间，其概率密度为

$$f_T(t)=\begin{cases} ae^{-at}, & t\geqslant 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

我们在时刻t_0观察该元件，发现它仍在工作。求此元件剩余寿命的数学期望$E[(T-t_0)|T\geqslant t_0]$。

解：令A_{t_0}为t_0时刻元件仍在工作的事件，则给定A_{t_0}条件下T的期望为

$$E[T|A_{t_0}]=\int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t|A_{t_0})\mathrm{d}t \qquad (1)$$

其中条件概率密度$f_T(t|A_{t_0})$未知，故解本题的关键就是要求出它。现令A_{t_1}为t_1时刻之前元件已失效的事件。于是，有

$$F_T(t_1|T\in A_{t_0})=P\{T\leqslant t_1|T\in A_{t_0}\}=P\{A_{t_1}|A_{t_0}\}$$

集合A_{t_0}和A_{t_1}如图1.4所示。

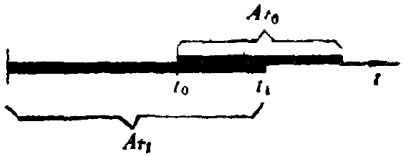


图 1.4

如果$t_1<t_0$，则$A_{t_1}\cap A_{t_0}=\varnothing$，此时

$$F_T(t_1|T\in A_{t_0})=0$$

若$t_1\geqslant t_0$，则有

$$P\{A_{t_1}|A_{t_0}\}=\frac{P\{A_{t_1}\cap A_{t_0}\}}{P(A_{t_0})}=\frac{\int_{t_0}^{t_1}ae^{-at}dt}{\int_{t_0}^{\infty}ae^{-at}dt}$$

$$=\frac{e^{-at_1}-e^{-at_0}}{-e^{-at_0}}=1-e^{-a(t_1-t_0)}$$

因此

$$F_T(t|T\in A_{t_0})=\begin{cases}1-e^{-a(t-t_0)}, & t\geqslant t_0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad(2)$$

对（2）式微分可得条件概率密度

$$f_T(t|t\in A_{t_0})=f_T(t|A_{t_0})=\begin{cases}ae^{-a(t-t_0)}, & t\geqslant t_0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad(3)$$

将（3）式代入（1）式中，可得

$$E[T|A_{t_0}]=\int_{t_0}^{\infty}t\,a\,e^{-a(t-t_0)}\,dt$$

$$=\int_0^{\infty}a(x+t_0)e^{-ax}\,dx=t_0+\frac{1}{a}$$

这就是所要求的元件剩余寿命的均值。

〔例1.15〕 设二个离散随机变量X、Y的联合概率密度为

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{3}\delta(x-2)\delta(y-1)+\frac{1}{3}\delta(x-3)\delta(y-1)$$

$$+\frac{1}{3}\delta(x-A)\delta(y-A)$$

试求：（1）X与Y不相关时的所有A值；（2）X与Y统计独立时所有A值。

解：（1）我们知道X与Y不相关时，应满足

$$E[XY]=E[X]E[Y] \qquad (1)$$

现计算（1）式中各个期望

$$E[XY]=\frac{1}{3}(2+3+A^2)=\frac{A^2+5}{3}$$

$$E[X]=\frac{1}{3}(2+3+A)=\frac{A+5}{3}$$

$$E[Y]=\frac{1}{3}(1+1+A)=\frac{A+2}{3}$$

把这些值代入（1）式，得到

$$2A^2-7A+5=0 \qquad (2)$$

（2）式的根为$A=\frac{5}{2}$和$A=1$。故A为$\frac{5}{2}$和1时，X与Y不相关。

（2）因为在X与Y统计独立时，它们必定不相关，故我们只需检验$A=\frac{5}{2}$和$A=1$这两个值即可。

1)在$A=\frac{5}{2}$时，因为

$$E[X^2Y^2]=\frac{1}{3}\left[4+9+\left(\frac{25}{4}\right)^2\right]=\frac{1}{3}\left(13+\frac{625}{16}\right)=\frac{833}{48}\approx 17.3542$$

$$E[X^2]=\frac{1}{3}\left(4+9+\frac{25}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(13+\frac{25}{4}\right)=\frac{77}{12}$$

$$E[Y^2]=\frac{1}{3}\left(1+1+\frac{25}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(2+\frac{25}{4}\right)=\frac{33}{12}$$

$$E[X^2]E[Y^2]=\frac{77}{12}\times\frac{33}{12}\approx 17.6458$$

故 $$E[X^2Y^2]\neq E[X^2]E[Y^2]$$

即：$A=\frac{5}{2}$时，X与Y不统计独立。

2)在$A=1$时，因为对所有的j、k，皆有

$$E[X^jY^k]=E[X^j]E[Y^k]$$

例如：$j=k=2$时，由于

$$E[X^2Y^2]=\frac{1}{3}(4+9+1)=\frac{14}{3}$$

$$E[X^2]=\frac{1}{3}(4+9+1)=\frac{14}{3}$$

$$E[Y^2]=\frac{1}{3}(1+1+1)=1$$

故 $$E[X^2Y^2]=E[X^2]E[Y^2]$$

所以，只有在$A=1$时，X与Y是统计独立的。

〔**例1.16**〕 设随机变量X的均值为3、方差为2。现定义新的随机变量

$$Y=-6X+22$$

试问随机变量X与Y是否正交、不相关？为什么？

解：因为X与Y的二阶联合矩为

$$E[XY]=E[X(-6X+22)]=-6E[X^2]+22E[X]$$

其中 $$E[X]=m_X=3$$

$$E[X^2]=\sigma_X^2+m_X^2=11$$

于是 $$E[XY]=-6\times 11+22\times 3=0$$

故X与Y是正交的。

由于

$$E[Y]=E[-6X+22]=-6E[X]+22=4$$

$$E[X]E[Y]=3\times 4=12$$

显然，有

$$E[XY]=0\neq E[X]E[Y]=12$$

所以，X与Y不是不相关的，即：它们是相关的。

六、随机变量的特征函数

（一）特征函数的定义

离散和连续随机变量X的特征函数分别定义为

$$C_X(u)=E[e^{juX}]=\sum_i e^{jux_i}P\{X=x_i\} \tag{1.99}$$

$$C_X(u)=E[e^{juX}]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{jux}f_X(x)dx \tag{1.100}$$

由式（1.100）可知，X的特征函数是其概率密度的傅里叶变换。若已知X的特征函数，可用傅里叶反变换求出其概率密度

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_X(u)e^{-jux}du \tag{1.101}$$

因此，$C_X(u)$与$f_X(x)$是一一对应的。

由于$|C_X(u)|\leqslant C_X(0)=1$，不管随机变量$X$是离散的，还是连续的，其特征函数总是存在的。

若随机变量X服从正态分布$N(0,1)$和$N(m_X,\sigma_X^2)$，则其特征函数分别为

$$C_X(u)=e^{-\frac{u^2}{2}} \tag{1.102}$$

$$C_X(u)=e^{jm_Xu-\frac{1}{2}\sigma_X^2u^2} \tag{1.103}$$

（二）特征函数的性质

（1）若$C_X(u)$是X的特征函数，则$Y=aX+b$（a、b皆为常数）的特征函数是

$$C_Y(u)=E[e^{ju(aX+b)}]=e^{jbu}C_X(au)$$

（2）若$Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$，且各X_i统计独立，则有

$$C_Y(u)=E\left[\exp\left(\mathrm{j}u\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right]=\prod_{i=1}^{n}C_{X_i}(u)$$

（三）特征函数与矩的关系

在已知X的特征函数时，我们可用下式很方便地求出它的各阶矩

$$E[X^n]=(-\mathrm{j})^n\frac{\mathrm{d}^nC_X(u)}{\mathrm{d}u^n}\bigg|_{u=0} \tag{1.104}$$

反之，在已知X的各阶矩时，我们能用下式唯一地确定它的特征函数

$$C_X(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{j}u)^n}{n!}E[X^n] \tag{1.105}$$

（四）联合特征函数

n维随机变量X_1，X_2，…，X_n的联合特征函数定义为

$$C_{X_1X_2\cdots X_n}(u_1,u_2,\cdots,u_n)=E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{j}u_iX_i\right)\right] \tag{1.106}$$

应用矩阵或向量运算方法，可简写为

$$C_X(\boldsymbol{u})=E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{X}}]=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n个}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}}f_X(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.107}$$

式中 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{u}^T=[u_1\ u_2\cdots u_n]$

其反变换为

$$f_X(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^n}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n个}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}}C_X(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u} \tag{1.108}$$

若二维正态随机变量X_1、X_2的均值皆为零，方差分别为$\sigma_{X_1}^2$、$\sigma_{X_2}^2$，它们的相关系数为r，则可求得二维特征函数

$$C_{X_1X_2}(u_1,u_2)=\exp\left[-\frac{1}{2}(\sigma_{X_1}^2u_1^2+2r\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}u_1u_2+\sigma_{X_2}^2u_2^2)\right] \tag{1.109}$$

如果正态随机变量X_1、X_2的均值也不为零，分别为m_{X_1}、m_{X_2}，则上式修正为

$$C_{X_1X_2}(u_1,u_2)=\exp\left\{j(m_{X_1}u+m_{X_2}u_2)-\frac{1}{2}(\sigma_{X_1}^2u_1^2+2r\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}u_1u_2+\sigma_{X_2}^2u_2^2)\right\} \tag{1.110}$$

联合特征函数的性质如下：

（1）当且仅当n个随机变量X_i独立时，有

$$C_X(\boldsymbol{u})=\prod_{i=1}^{n}C_{X_i}(u_i)$$

（2）边沿特征函数$C_{X_1}(u_1)=C_X(u_1,0,\cdots,0)$

（3）若$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$，则有

$$C_Y(\boldsymbol{u})=C_X(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u})$$

（4）联合矩公式

$$m_{b_1\cdots b_n}=E[X_1^{b_1}\cdots X_n^{b_n}]=(-\mathrm{j})^B\frac{\partial^BC_X(\boldsymbol{u})}{\partial u_1^{b_1}\cdots\partial u_n^{b_n}}\bigg|_{\boldsymbol{u}=0},\quad B=b_1+\cdots+b_n$$

零均值多维正态随机变量$\boldsymbol{X}$的特征函数为

$$C_X(\boldsymbol{u})=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}} \tag{1.111}$$

非零均值多维正态随机变量$\boldsymbol{X}$的特征函数为

$$C_X(\boldsymbol{u})=\exp\left(j\,\boldsymbol{m}_X^T\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}\right) \tag{1.112}$$

最后，介绍一个重要公式。若X_1、X_2、X_3、X_4是均值为零的四个正态随机变量，则它们的四阶联合矩

$$E[X_1X_2X_3X_4]=E[X_1X_2]E[X_3X_4]+E[X_1X_3]E[X_2X_4]+E[X_1X_4]E[X_2X_3] \tag{1.113}$$

（五）例解

〔**例1.17**〕 设离散型随机变量X取值1和0的概率分别为

$$P\{X=1\}=p,\ P\{X=0\}=q=1-p$$

求X的特征函数。

解：由式（1.99）及题设条件，可得X的特征函数

$$C_X(u)=\sum_i e^{jux_i}P\{X=x_i\}=e^{ju\times 1}p+e^{ju\times 0}q=pe^{ju}+q$$

〔**例1.18**〕 设随机变量X为均匀分布，其概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（1）求X的特征函数$C_X(u)$；(2)由所得的$C_X(u)$，求X的均值。

解：(1)由式（1.100）和已知条件，可求得X的特征函数

$$C_X(u)=E[e^{juX}]=\int_a^b\frac{e^{jux}}{b-a}dx=\frac{e^{jux}\Big|_a^b}{(b-a)ju}$$

$$=\frac{e^{jub}-e^{jua}}{ju(b-a)}\qquad(1)$$

（2）由式（1.104）可知，X的均值

$$E[X]=-j\frac{dC_X(u)}{du}\Big|_{u=0}$$

对(1)式求导得到

$$\frac{dC_X(u)}{du}=\frac{-j}{b-a}\left[\frac{(jbe^{jub}-jae^{jua})u-(e^{jub}-e^{jua})}{u^2}\right]$$

利用罗比塔法则，我们有

$$\frac{dC_X(u)}{du}\Big|_{u=0}=j\frac{b+a}{2}$$

因此

$$E[X]=\frac{b+a}{2}$$

〔**例1.19**〕 设随机变量X_1、X_2的联合特征函数为

$$C_{X_1X_2}(u_1,u_2)=e^{-2u_1^2-8u_2^2}$$

（1）求X_1与X_2的均值；（2）X_1与X_2是否正交、不相关？为什么？

解：（1）由联合矩公式，可得

$$m_{10}=E[X_1]=-\mathrm{j}\frac{\partial C_{X_1X_2}(u_1,u_2)}{\partial u_1}\Bigg|_{u_1=u_2=0}$$

$$=-\mathrm{j}(-4u_1)\mathrm{e}^{-2u_1^2-8u_2^2}\Big|_{u_1=u_2=0}=0$$

$$m_{01}=E[X_2]=-\mathrm{j}\frac{\partial C_{X_1X_2}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\Bigg|_{u_1=u_2=0}$$

$$=-\mathrm{j}(-16u_2)\mathrm{e}^{-2u_1^2-8u_2^2}\Big|_{u_1=u_2=0}=0$$

可见，X_1、X_2的均值皆为零。

（2）由于X_1与X_2的二阶联合矩

$$m_{11}=E[X_1X_2]=(-\mathrm{j})^2\frac{\partial^2 C_{X_1X_2}(u_1,u_2)}{\partial u_1\partial u_2}\Bigg|_{u_1=u_2=0}$$

$$=(-\mathrm{j})^2(64u_1u_2)\mathrm{e}^{-2u_1^2-8u_2^2}\Big|_{u_1=u_2=0}=0$$

这样，便有

$$E[X_1X_2]=E[X_1]E[X_2]=0$$

所以，X_1与X_2正交，又不相关。

Ⅲ、习　　题

1—1　纸盒内共装有8只晶体管，其中3只是次品。求从盒中任取2只都是正品的概率。

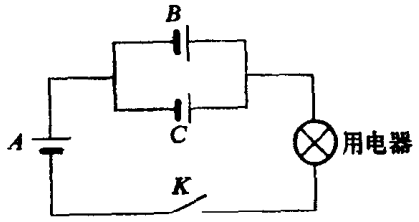
1—2　设某雷达接收机的前置中频放大器共采用了3只不同型号的晶体管，按5000小时工作期限计，它们的故障率分别为0.2、0.1、0.15，假定其它元件出故障的可能性可以忽略不计。求该放大器在5000小时工作中出故障的概率。

1—3　我方对敌方雷达设备施放干扰，根据以往作战经验，可估算出三种干扰措施的成功率分别为0.2、0.3、0.4。求恰好只有一种措施干扰成功

的概率。

1—4　如果上述三种干扰措施同时采用，敌方雷达被干扰失效的总概率为多少？

1—5　图题1—5所示电路的电源由A、B、C三组电池构成，它们的损坏概率分别为0.3、0.2、0.2。求该电路工作间断的概率。



图题 1—5

1—6　在半径为R的圆内放置一个较小的半径为r的圆。假设投点命中的概率与圆面积成正比，而与其位置无关。试求随机地向大圆内投的点也落在小圆内的概率。

1—7　在一个平面内，画上彼此相距$2a$的平行直线，向此平面任意投掷半径为$r(r<a)$的硬币。求硬币不与任何一条直线相遇的概率。

1—8　将一半径为$r\left(r<\frac{a}{2}\right)$的硬币投掷在画有边长为$a$的方形网格上。假设命中平面图形的概率与平面图形的面积成正比，而与其位置无关。求硬币不与正方形的任何一边相交的概率。

1—9　一高速旋转的半径为R的圆盘被分成偶数个相等的扇形，且轮流染成白色和黑色。对圆盘进行射击，并设在平面图形上落下子弹的概率与此图形的面积成正比，求弹着点在白色扇形之一上的概率。

1—10　蒲丰投针问题。平面上画有彼此间距为$2a$的平行线，向平面任意投一长为$2l(l<a)$的针，试求针与平行线相交的概率。

1—11　在三只盒子中放有电容器，放置情况如表1.4所示。现做一试验，先任选一只盒子，并设每只盒子选中的可能性相等。然后，由被选中的盒子中抽取一只电容器。

（1）已知选中盒子2，那末，抽取的电容器为0.01μF的概率是多少？

（2）若抽取的电容器为0.01μF，求其来自盒子3的概率。〔提示：运用贝叶斯公式和全概率公式。〕

表 1.4 电容器放置表

电容值(μF) \ 盒子序号 / 盒中电容器数	1	2	3	总计
0.01	20	95	25	140
0.1	55	35	75	165
1.0	70	80	145	295
总计	145	210	245	600

1—12 某公司出售功率为10、25和50(W)的高保真度音频放大器。该公司现有：10W的放大器100块，其中15%为不合格品；25W的70块，其中10%为不合格品；50W的30块，其中10%为不合格品。试求：(1)售出一块10W的放大器为不合格品的概率；(2)若每种放大器售出的可能性相等，那么，任意抽出一块为50W且为不合格品的概率；(3)任意抽取一块出售为不合格品的概率。

1—13 若两个继电器A和B同时出故障，则导弹为故障发射。已知A和B出故障的概率分别为0.01和0.03；又知若A出了故障，则B出故障的可能性增大(概率为0.06)。试求：(1)导弹故障发射的概率；(2)若B有了故障，A出故障的概率；(3)事件“A故障”和“B故障”是否统计独立？

1—14 某高炮排有雷达指挥的高炮与光学仪器指挥的高炮各一门，独立地对一架敌机进行射击，雷达指挥的高炮命中率为0.9，光学仪器指挥的高炮命中率为0.2，一次射击后只有一弹射中。求此弹为雷达指挥的高炮所射中的概率。

1—15 已知事件A_1与A_2是统计独立的，证明：(1)A_1独立于$\overline{A}_2$；(2)$\overline{A}_1$独立于A_2；(3)$\overline{A}_1$独立于$\overline{A}_2$。

1—16 设随机变量X的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{当}x<0\\ Ax^2, & \text{当}0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & \text{当}x>1\end{cases}$$

求：(1)系数A；(2)X落在区间(0.3，0.7)内的概率；(3)X的概率密度。

1—17 设随机变量X服从柯西分布

$$F_X(x)=A+B\operatorname{arctg}x,\quad -\infty<x<\infty$$

求：(1)系数A与B；(2)X落在区间$(-1,1)$内的概率；(3)X的概率密度。

1—18 设随机变量X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & \text{当}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求：(1)$X<\frac{1}{2}$的概率；(2)$\frac{1}{4}<X<\frac{1}{2}$的概率。

1—19 设随机变量X的概率密度为（拉普拉斯分布）

$$f_X(x)=Ae^{-|x|},\quad -\infty<x<\infty$$

求：(1)系数A；(2)X落在区间$(0,1)$内的概率；(3)X的分布函数。

1—20 设随机变量X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & \text{当}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求随机变量函数$Y=3X+1$的概率密度。

1—21 设随机变量X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi(x^2+1)}, & \text{当}x>0\\ 0, & \text{当}x\leqslant 0\end{cases}$$

求随机变量函数$Y=\ln X$的概率密度。

1—22 我们从甲、乙两家工厂购得“相同的”元件。从甲厂购得元件的失效时间用指数随机变量X示之，即有

$$f_X(x)=\begin{cases}ae^{-ax}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

从乙厂购得元件的失效时间用指数随机变量Y示之，即有

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{a}{3}e^{-ay/3}, & y\geqslant 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

显而易见，乙厂的元件是比较“可靠的”，但是，价格要贵两倍。假定(X,Y)的二维概率密度为

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

（1）求乙厂的元件的寿命比甲厂的至少长两倍的概率。

（2）假设我们检验两家工厂的元件，计算以下概率：

1）到时刻t_0两种元件都失效；

2）到时刻t_0两种元件皆未失效；

3）在时刻t_0至少一种元件还在工作。

1—23 设二维正态随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r_{XY}^2}\sigma_X\sigma_Y}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_{XY}^2)}\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-2r_{XY}\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}$$

其中m_X、m_Y、σ_X、σ_Y、r_{XY}皆为常数，且$\sigma_X>0$，$\sigma_Y>0$，$|r_{XY}|\leqslant 1$。求二维正态随机变量的边沿概率密度。

1—24 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}A(R-\sqrt{x^2+y^2}), & \text{当}x^2+y^2\leqslant R^2\\ 0, & \text{当}x^2+y^2>R^2\end{cases}$$

求：(1)系数A；(2)随机变量(X,Y)落在圆$x^2+y^2=r^2(r<R)$内的概率。

〔提示：应用极坐标，将直角坐标点(x,y)转换为(z,φ)。〕

1—25 某工厂用甲、乙两种不同的工艺流程生产同一型号电子管。在假定随机变量X和Y分别为甲和乙流程所生产电子管的失效时间以后，我们发现X与Y的联合概率密度为

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}abe^{-(ax+by)}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

式中$a=\frac{1}{200}$，$b=\frac{1}{300}$。试求用X表征的管子失效时间大于用Y表征的管子的失效时间的概率。

1—26 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\cos x\cos y, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

证明随机变量X与Y统计独立。

〔提示：只要证出条件概率密度与边沿概率密度相等即可。〕

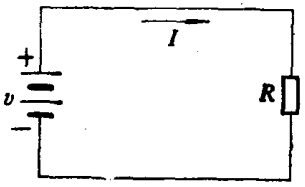
1—27 设离散型随机变量X的分布律为

X	3	6	7
p_n	0.2	0.1	0.7

求随机变量$Y=3X+1$的分布律。

1—28 设有一个简单的电路，如图题1—28所示：电池具有恒定电压

v，电阻R被设计为50Ω，但其实际值为一均匀分布在45～55Ω（±10%偏差）之间的随机变量，这样，电流I也是一随机变量。试求I的分布函数$F_I(i)$和概率密度$f_I(i)$。



图题 1—28

1—29 设随机变量X_1与X_2统计独立，它们的概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x_1/2}, & 当x_1\geqslant 0\\ 0, & 当x_1<0\end{cases}$$

$$f_{X_2}(x_2)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-x_2/3}, & 当x_2\geqslant 0\\ 0, & 当x_2<0\end{cases}$$

求随机变量$Y=X_1+X_2$的概率密度。

1—30 设X和Y是两个相互独立的随机变量，它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

求随机变量$Z=X+Y$的概率密度。

1—31 在一简单电路中，两电阻R_1和R_2串联连接。设R_1、R_2相互独立，它们的概率密度分别为

$$f_{R_1}(r_1)=\begin{cases}\frac{10-r_1}{50}, & 0<r_1<10\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_{R_2}(r_2)=\begin{cases}\frac{10-r_2}{50}, & 0<r_2<10\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求总电阻$R=R_1+R_2$的概率密度。

1—32 已知随机变量(X_1,X_2)与随机变量(Y_1,Y_2)存在下列线性关系

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2) = aX_1 + bX_2$$
$$Y_2 = g_2(X_1, X_2) = cX_1 + dX_2$$

式中a、b、c、d均为实常数，且$ad - bc \neq 0$。另外，还知道随机变量(X_1, X_2)的二维概率密度为$f_{X_1X_2}(x_1, x_2)$。求$f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2)$的表达式。

1—33 设X为二维随机向量，其分量X_1与X_2互为独立的随机变量，且分别具有概率密度$f_{X_1}(x_1)$与$f_{X_2}(x_2)$。令Y为新的二维随机向量，其分量由下列变换定义

$$Y_1 = X_1, \quad Y_2 = X_1X_2$$

试求：(1)(Y_1, Y_2)的联合概率密度；(2)Y_2的边沿概率密度。

1—34 设随机变量X的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-x^2/2\sigma_X^2}$$

求随机变量$Y = \frac{1}{4}X^2$的概率密度。

1—35 设随机变量X的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

求随机变量$Y = X^3 + 2$的概率密度

1—36 已知两个相互独立的正态随机变量X_1和X_2，它们的概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{X_1}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_{X_1}^2}\right)$$

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{X_2}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2\sigma_{X_2}^2}\right)$$

求：(1)随机变量$Y_1 = \frac{X_1}{X_2}$的概率密度$f_{Y_1}(y_1)$；(2)在$\sigma_{X_1}^2 = \sigma_{X_2}^2 = 1$时，随机变量$Y_2 = X_2 - X_1$的概率密度$f_{Y_2}(y_2)$。

1—37 设离散型随机变量X的分布律为

X	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
p_k	0.2	0.7	0.1

求随机变量$Y = \sin X$的分布律。

1—38 设随机变量X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求随机变量$Y=\cos X$的概率密度。

1—39 设随机变量X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求随机变量$Y=a\operatorname{tg}X(a>0$的常数）的概率密度。

1—40 已知相互独立的正态随机变量X和Y，均值为$m_X=m_Y=0$，方差为$\sigma_X^2=\sigma_Y^2=\sigma^2$；又知 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$，$\Phi=\operatorname{arctg}\dfrac{Y}{X}$。求二维概率密度$f_{Z\Phi}(z,\varphi)$。

1—41 设二维随机变量（X,Y）的联合概率密度为

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{5}{16}x^2y, & 0<y<x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（1）求随机变量X和Y的边沿概率密度；

（2）随机变量X与Y是否统计独立？为什么？

1—42 设随机变量X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}C(x^2+2x), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求：(1)系数C；(2)随机变量X的数学期望。

1—43 设随机变量X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求函数$Y=X^2$的数学期望。

1—44 设X为非负的随机变量，证明

$$E\left[\frac{1}{X}\right]\geqslant\frac{1}{E[X]}$$

〔提示：利用许瓦兹不等式证。〕

1—45 设随机变量$X_i(i=1,2,\cdots n)$互为统计独立，并具有相同的分

布，其概率密度为

$$f_{X_i}(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & x\geqslant 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求函数 $Y=\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ 的数学期望。

1—46 设随机变量 X 服从拉普拉斯分布，其概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\quad -\infty<x<\infty$$

求 X 的数学期望与方差。

1—47 随机变量 X 的可能取值为 $\{-4,-1,2,3,4\}$，且每个值出现的概率均为1/5。试求：（1）随机变量 $Y=3X^3$ 的概率密度；（2）Y 的数学期望；（3）Y 的方差。

1—48 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f_{XY}(x,y)=A\sin(x+y),\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$$

求：（1）系数 A；（2）数学期望 m_X、m_Y；（3）方差 σ_X^2、σ_Y^2；（4）相关矩 K_{XY} 和相关系数 r_{XY}。

1—49 设两个随机变量 X、Y 的均值为 $m_X=1$、$m_Y=2$，方差为 $\sigma_X^2=4$、$\sigma_Y^2=1$，相关系数 $r_{XY}=0.4$。现定义新随机变量 V、W 为

$$V=-X+2Y\qquad W=X+3Y$$

求 V、W 的均值、方差，以及它们的相关系数。

1—50 设随机变量 X、Y 的联合概率密度为

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+y)^2}{40}, & -1\leqslant x\leqslant 1,\ -3<y<3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求：（1）X 与 Y 的所有的二阶原点矩；（2）X、Y 的方差；（3）X 和 Y 的相关系数。

1—51 设有 n 个随机变量 X_1、X_2、…、X_n，满足 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$。证明

$$\sigma_Y^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_{X_i}^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K_{X_iX_j},\quad i\neq j$$

1—52 设随机变量X和Y满足

$$Y = aX + b,\ a、b皆为常数$$

证明：（1）$K_{XY} = a\sigma_X^2$；（2）$r_{XY} = \begin{cases} 1, & 当a>0 \\ -1, & 当a<0 \end{cases}$；

（3）当$E[X] \neq 0$，且满足 $b = -\dfrac{aE[X^2]}{E[X]}$时，则随机变量$X$和$Y$互为正交。

1—53 设二维离散随机变量X和Y的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f_{XY}(x,y) = {} & 0.15\delta(x+1)\delta(y) + 0.1\delta(x)\delta(y) + 0.1\delta(x)\delta(y-2) \\ & + 0.4\delta(x-1)\delta(y+2) + 0.2\delta(x-1)\delta(y-1) \\ & + 0.05\delta(x-1)\delta(y-3) \end{aligned}$$

求：（1）$E[XY]$；（2）协方差K_{XY}；（3）相关系数r_{XY}。并问X与Y是否正交或不相关？为什么？

1—54 设二维离散随机变量X、Y的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f_{XY}(x,y) = {} & 0.3\delta(x-\alpha)\delta(y-\alpha) + 0.5\delta(x+\alpha)\delta(y-4) \\ & + 0.2\delta(x+2)\delta(y+2) \end{aligned}$$

（1）求使X和Y的协方差为最小的α值，并求出最小协方差。

（2）试问随机变量X与Y是否不相关？为什么？

1—55 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{9}, & 0<x<2,\ 0<y<3 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

试问X与Y是否正交、不相关、统计独立？为什么？

1—56 三个不相关的随机变量X_1、X_2、X_3的均值分别为1、-3、1.5，二阶原点矩分别为2.5、11、3.5。设新随机变量为$Y = X_1 - 2X_2 + 3X_3$。求：（1）Y的均值；（2）Y的方差。

1—57 设随机变量X和Y的均值皆为零，且它们有相同的方差。现定义新的随机变量$U = X + Y$，$V = X - Y$。证明U和V是不相关的。

1—58 设X、Y为随机变量，现定义新的随机变量

$$U = aX + bY + c,\ V = dX + eY + f$$

求随机变量U与V不相关时的a、b、c、d、e、f。

1—59 定义随机变量Y和Z为$Y = X_1 + aX_2$，$Z = X_1 - aX_2$，其中a是一个实数，X_1和X_2是随机变量。求：a为何值（用X_1和X_2的矩表示）时，Y和Z正交。

1—60　已知两个随机变量X和Y分别为

$$X=\cos\Phi,\quad Y=\sin\Phi$$

其中Φ是在$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量。证明X与Y非统计独立。

1—61　设随机变量(X,Y)的联合概率密度为

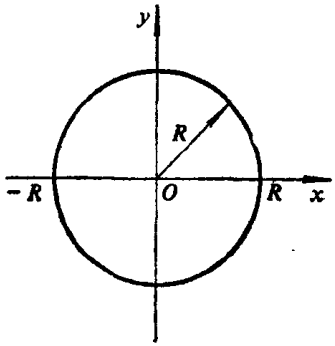
$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{\pi^2(x^2+y^2+x^2y^2+1)}$$

试确定随机变量X与Y是否统计独立？

1—62　雷达显示器的圆形屏幕半径为R（参看图题1—62），设目标出现点(X,Y)在屏幕上按均匀分布。其联合概率密度为

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\leqslant R^2\\ 0, & x^2+y^2>R^2\end{cases}$$

求：（1）随机变量X、Y的边沿概率密度；（2）X、Y的条件概率密度。并问：X与Y是否统计独立？为什么？



图题 1—62

1—63　设二维随机变量(X_1,X_2)为正态分布。试证：如果随机变量Y_1和Y_2是由X_1和X_2关于点$\{E[X_1],\ E[X_2]\}$的旋转变换所定义的，并且旋转角φ选取为

$$\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2\mu_{11}}{\sigma_{x_1}^2-\sigma_{x_2}^2}$$

则随机变量Y_1和Y_2将是独立的正态变量。

1—64　设随机变量X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

式中α为正的实数。求X的特征函数；并图示$\mathrm{Re}[C_X(u)]$和$\mathrm{Im}[C_X(u)]$。

1—65　设随机变量X的概率密度为

$$f_X(x)=\frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\quad,\quad \alpha\text{为正实数}$$

求X的特征函数；并讨论$\mathrm{Re}[C_X(u)]$和$\mathrm{Im}[C_X(u)]$的奇偶性。

1—66　随机变量X服从柯西分布，其概率密度为

$$f_X(x)=\frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)},\ \alpha\text{为正实数}$$

求X的特征函数；并通过$C_X(u)$讨论X的均值与方差。

1—67　离散随机变量X可能取$(n+1)$个值$x_k=k\alpha(k=0,1,2,\cdots,n)$，式中$\alpha$为正实数；$X$取各可能值的概率相同。试证$X$的特征函数为

$$C_X(u)=\frac{1}{n+1}\,\frac{\sin[(n+1)\alpha u/2]}{\sin(\alpha u/2)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\alpha u/2}$$

1—68　设X为泊松随机变量，即有

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\quad,\quad k=0,1,\cdots$$

（1）求X的特征函数；（2）由所得的$C_X(u)$，求X的均值与方差。

1—69　在统计学书籍中，常用一个与特征函数紧密相关的函数

$$M_X(u)=E[\mathrm{e}^{uX}]\qquad(u\text{为一实变量})$$

我们称$M_X(u)$为矩生成函数。试证

$$E[X^n]=\left.\frac{\mathrm{d}^nM_X(u)}{\mathrm{d}u^n}\right|_{u=0}$$

1—70　已知正态随机变量X的概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}$$

设新的随机变量

$$Y=aX^2,\ a\text{为正实数}$$

试用特征函数法来确定Y的概率密度。

1—71　已知X_1、X_2、…、X_n是相互独立的正态随机变量，它们的均值皆为零，方差皆为1。求随机变量$Y=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$的特征函数。

1—72　设随机变量X_1和X_2的联合特征函数为

$$C_{X_1X_2}(u_1,u_2)=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta-\mathrm{j}\alpha u_2-\mathrm{j}\beta u_1-u_1u_2}$$

其中α、β均为正常数。求X_1和X_2的联合概率密度。

1—73　若随机变量X和Y满足

$$E[X^nY^k]=E[X^n]E[Y^k]$$

则X与Y互为统计独立。证明之。

〔提示：只要证明$C_{XY}(u,v)=C_X(u)C_Y(v)$即可。〕

1—74　已知两个零均值、单位方差的正态随机变量X和Y的相关系数为

$$r(X,Y)=r$$

它们的联合特征函数为

$$C_{XY}(u,v)=\exp\left(-\frac{1}{2}(u^2+v^2+2ruv)\right)$$

求X^2与Y^2之间的相关系数$r(X^2,Y^2)$。

1—75　已知归一化正态随机变量X_1和X_2的联合特征函数为

$$C_{X_1X_2}(u_1,u_2)=\exp\left(-\frac{1}{2}(u_1^2+2ru_1u_2+u_2^2)\right)$$

试证：如果用复变量$\omega=\lambda+\mathrm{j}u$代替$\mathrm{j}u$时，二维随机变量的特征函数成为

$$C_{X_1X_2}(\omega_1,\omega_2)=\exp\left(\frac{1}{2}(\omega_1^2+2r\omega_1\omega_2+\omega_2^2)\right)$$

1—76　已知$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$，其中

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{pmatrix}$$

若$\boldsymbol{K}_X$、$\boldsymbol{K}_Y$分别表示随机变量X_1和X_2、Y_1和Y_2的协方差矩阵。试证

$$\boldsymbol{K}_X=\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}_Y\boldsymbol{C}^T$$

第二章　随机过程

Ⅰ．本章要点

在教材中，本章首先论及了随机过程的定义、概率分布、数字特征、特征函数等基本概念，并介绍了随机过程的微分与积分。然后，着重讲述了平稳随机过程、遍历过程、复随机过程、离散时间随机过程、正态过程的定义及其统计特性；特别研讨了平稳随机过程的数学期望、相关函数及其性质，以及两个随机过程的独立、不相关、正交等概念。

本章的重点及其要求：(1)根据随机过程的具体形式，学会求它的概率分布及各种数字特征。(2)已知随机过程的表达式，能熟练地判断该过程是否具有平稳性、遍历性；由图示的函数曲线或者给定的数学表达式，判定其是否是平稳过程的正确的相关函数的曲线或表达式。(3)对于平稳过程，要会计算它的相关系数和相应时间，并对它们要有明确的认识。

本章在全书中起着承上启下的作用，是后续各章的基础，应予充分重视。

Ⅱ．基本内容与例解

一、随机过程的基本概念及其统计特性

（一）随机过程的定义

定义1　设随机试验E的样本空间$S=\{\zeta\}$，若对于每个元素$\zeta\in S$，总有一个确知的时间函数$X(t,\zeta)(t\in T)$与它相对应；这样，

对于所有的$\zeta\in S$，就可得到一族时间 t 的函数，称它为随机过程。族中的每一个函数称为该过程的样本函数。

定义2 若对于每个特定的时间$t_i(i=1,2,\cdots)$，$X(t_i,\zeta)$都是随机变量，则称$X(t,\zeta)$为随机过程。

通常，将随机过程$X(t,\zeta)$简记为$X(t)$，过程 $X(t)$的 样本用小写字母$x(t)$示之。

（二）随机过程的概率分布

随机过程$X(t)$在任一特定时刻$t_1(\in T)$的一维分布函数定义为

$$F_X(x_1;t_1)=P\{X(t_1)\leqslant x_1\} \tag{2.1}$$

相应的$X(t)$的一维概率密度定义为

$$f_X(x_1;t_1)=\frac{\partial F_X(x_1;t_1)}{\partial x_1} \tag{2.2}$$

类似地，随机过程$X(t)$的 n 维分布函数和 n 维概率密度分别定义为

$$F_X(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=P\{X(t_1)\leqslant x_1,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n\} \tag{2.3}$$

$$f_X(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=\frac{\partial^n F_X(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)}{\partial x_1\cdots\partial x_n} \tag{2.4}$$

它们有如下性质：

（1） $F_X(x_1,x_2,\cdots,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_i,\cdots,t_n)=0$ (2.5)

（2） $F_X(\infty,\cdots,\infty;t_1,\cdots,t_n)=1$ (2.6)

（3） $f_X(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)\geqslant 0$ (2.7)

（4） $$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n\text{重}} f_X(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=1 \tag{2.8}$$

（5） $$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{(n-m)\text{重}} f_X(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)\mathrm{d}x_{m+1}\mathrm{d}x_{m+2}\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=f_X(x_1,\cdots,x_m;t_1,\cdots,t_m) \tag{2.9}$$

（6） 若$X(t_1)$、$X(t_2)$、…、$X(t_n)$统计独立，则有

$$f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$
$$= f_X(x_1; t_1) f_X(x_2; t_2) \cdots f_X(x_n; t_n) \tag{2.10}$$

（三）随机过程的数字特征

若随机过程$X(t)$在时刻t_1（或t）、t_2的可能取值为x_1（或x）、x_2，则其数字特征分别定义为

1．数学期望（或均值）

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x; t)\mathrm{d}x \tag{2.11}$$

2．均方值

$$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x; t)\mathrm{d}x \tag{2.12}$$

3．方差

$$\sigma_X^2(t) = D[X(t)] = E[\overset{\circ}{X}{}^2(t)] = E[(X(t) - m_X(t))^2]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_X(t)]^2 f_X(x; t)\mathrm{d}x \tag{2.13}$$

其中中心化随机变量$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_X(t)$。

4．（自）相关函数

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{2.14}$$

若$t_1 = t_2 = t$时，则有

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t, t) = E[X^2(t)] = \Psi_X^2(t) \tag{2.15}$$

5．（自）协方差函数

$$K_X(t_1, t_2) = E[\overset{\circ}{X}(t_1)\ \overset{\circ}{X}(t_2)]$$
$$= E[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_X(t_1)][x_2 - m_X(t_2)]$$
$$\times f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{2.16}$$

且有

$$K_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2) \tag{2.17}$$

若$t_1=t_2=t$时，则有

$$K_X(t_1,t_2)=K_X(t,t)=E[(X(t)-m_X(t))^2]=\sigma_X^2(t)$$
$$=R_X(t,t)-m_X^2(t) \tag{2.18}$$

（四）随机过程的特征函数

随机过程$X(t)$在任一特定时刻t_1的一维特征函数定义为

$$C_X(u_1;t_1)=E[e^{ju_1X(t_1)}]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ju_1x_1}f_X(x_1;t_1)dx_1 \tag{2.19}$$

且有

$$f_X(x_1;t_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C_X(u_1;t_1)e^{-ju_1x_1}du_1 \tag{2.20}$$

$$E[X^n(t)]=(-j)^n\frac{\partial^nC_X(u;t)}{\partial u^n}\Big|_{u=0} \tag{2.21}$$

同理，过程$X(t)$的n维特征函数定义为

$$C_X(u_1,\cdots,u_n;t_1,\cdots,t_n)=E[\exp\{ju_1X(t_1)+\cdots$$
$$+ju_nX(t_n)\}]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{j(u_1x_1+\cdots+u_nx_n)}$$
$$\times f_X(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)dx_1\cdots dx_n \tag{2.22}$$

且有

$$f_X(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}C_X(u_1,\cdots,u_n;t_1,\cdots,$$
$$t_n)e^{-j(u_1x_1+\cdots+u_nx_n)}du_1\cdots du_n \tag{2.23}$$

（五）例解

〔例2.1〕 设正弦波随机过程为

$$X(t)=A\cos\omega_0t$$

其中ω_0为常数；A为均匀分布在（0，1）内的随机变量，即

$$f_A(a)=\begin{cases}1, & 0\leqslant a\leqslant 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（1）画出过程$X(t)$的几个样本函数的图形；

（2）试求$t=0$、$\frac{\pi}{4\omega_0}$、$\frac{3\pi}{4\omega_0}$、$\frac{\pi}{\omega_0}$时，$X(t)$的一维概率密度，并画出它们的曲线；

（3）试求$t=\frac{\pi}{2\omega_0}$时，$X(t)$的一维概率分布。

解：（1）若$A=\frac{2}{3}$，若$X(t)=\frac{2}{3}\cos\omega_0 t$为一个确定性函数（见图2.1($a$)）；若$A=0$，则$X(t)=0$（见图2.1($b$)）；若$A=1$，则$X(t)=\cos\omega_0 t$是一个确定性函数（见图2.1($c$)）。

（2）当$t=0$时，$X(0)=A\cos(\omega_0\cdot 0)=A$，因此，$X(0)$的概率密度就是$A$的概率密度（见图2.2($a$)），即

$$f_{X_0}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

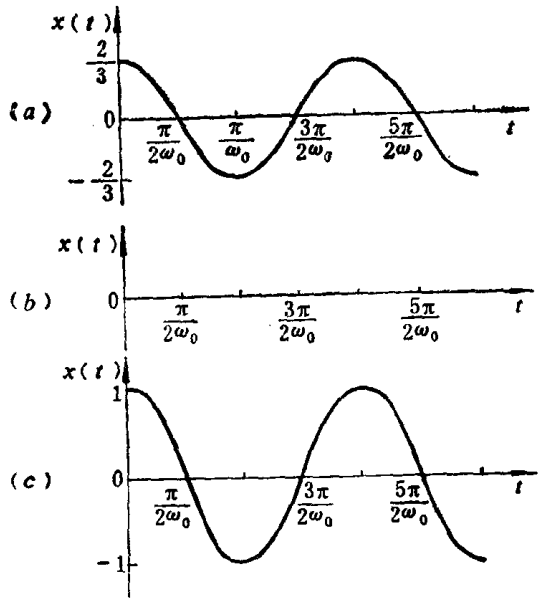


图 2.1

当$t_1=\frac{\pi}{4\omega_0}$时，$X(t_1)=X_1=A\cos\left(\omega_0\cdot\frac{\pi}{4\omega_0}\right)=A\cos\frac{\pi}{4}=$

$\frac{1}{\sqrt{2}}A$。因为随机变量A均匀分布在（0，1）上，所以，随机变量$X(t_1)$均匀分布在$(0,1/\sqrt{2})$上，即

$$f_{X_1}(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1/\sqrt{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

见图2.2（b）。

当$t_3=\frac{3\pi}{4\omega_0}$时，$X(t_3)=X_3=A\cos\left(\omega_0\cdot\frac{3\pi}{4\omega_0}\right)=A\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}A$。因此，同理有

$$f_{X_3}(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & -1/\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其曲线如图2.2（c）所示。

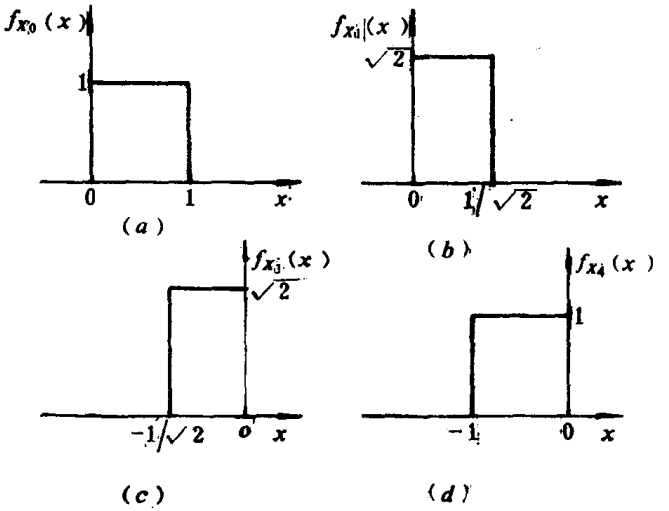


图 2.2

当$t_4=\frac{\pi}{\omega_0}$时，$X(t_4)=X_4=A\cos\left(\omega_0\cdot\frac{\pi}{\omega_0}\right)=A\cos\pi=-A$。

故得

$$f_{x_1}(x)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其曲线如图2.2(*d*)所示。

（3） 当$t_2=\frac{\pi}{2\omega_0}$时，$X(t_2)=X_2=A\cos\left(\omega_0\cdot\frac{\pi}{2\omega_0}\right)=A\cos\frac{\pi}{2}$

$=0$。因此，不论A值的大小，对于$t_2=\frac{\pi}{2\omega_0}$，均有$X(t_2)=X_2=0$。故$P\{X(t_2)=0\}=1$或$X(t_2)$的分布函数$F_{x_2}(x)=U(x)$，即：$F_{x_2}(x)$是在$x=0$的单位阶跃函数；而其概率密度为$f_{x_2}(x)=\delta(x)$，即：它是个在$x=0$处的冲激。它们的曲线如图2.3(*a*)、(*b*)所示。

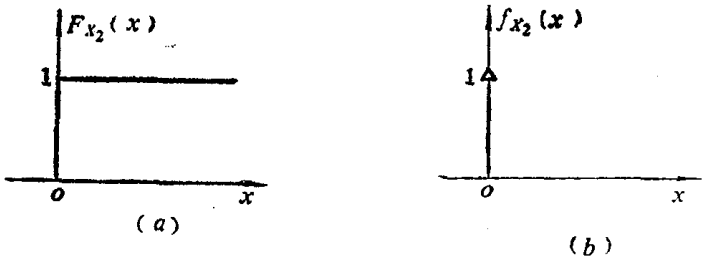


图 2.3

〔**例2.2**〕 设随机振幅信号为

$$X(t)=V\sin\omega_0 t$$

其中ω_0为常数；V是标准正态随机变量。求该随机信号的均值、方差、相关函数和协方差函数。

解：由于V为标准正态随机变量，故它的均值$E[V]=0$、方差$D[V]=1$。于是，得到V的均方值

$$E[V^2]=D[V]+E^2[V]=1$$

根据随机过程数字特征的定义和性质，可求得随机信号$X(t)$的均值、方差、相关函数和协方差函数分别为

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[V\sin\omega_0 t]=\sin\omega_0 t\,E[V]=0$$

$$\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=D[V\sin\omega_0 t]=\sin^2\omega_0 t\,D[V]=\sin^2\omega_0 t$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E[V\sin\omega_0 t_1\cdot V\sin\omega_0 t_2]$$
$$=\sin\omega_0 t_1\cdot\sin\omega_0 t_2 E[V^2]=\sin\omega_0 t_1\cdot\sin\omega_0 t_2$$
$$K_X(t_1,t_2)=E[(X(t_1)-m_X(t_1))(X(t_2)-m_X(t_2))]$$
$$=E[X(t_1)X(t_2)]$$
$$=R_X(t_1,t_2)=\sin\omega_0 t_1\cdot\sin\omega_0 t_2$$

注意：本题中，时间函数$\sin\omega_0 t$为非随机量，在作数学期望运算时，应将其当成常数来处理。

〔**例2.3**〕 设随机相位信号

$$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Phi)$$

式中a、ω_0皆为常数，Φ为均匀分布在$(0,2\pi)$上的随机变量。求该随机信号的均值、方差、相关函数的协方差函数。

解：由题意可知，Φ的概率密度为

$$f_\Phi(\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

根据随机过程数字特征的定义和性质，求得$X(t)$的均值、方差、相关函数和协方差函数分别为

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[a\cos(\omega_0 t+\Phi)]$$
$$=\int_0^{2\pi}a\cos(\omega_0 t+\varphi)\cdot\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\varphi=0$$
$$\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=E[(X(t)-m_X(t))^2]=E[a^2\cos^2(\omega_0 t+\Phi)]$$
$$=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}E[\cos 2(\omega_0 t+\Phi)]=\frac{a^2}{2}$$
$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$
$$=E[a\cos(\omega_0 t_1+\Phi)\cdot a\cos(\omega_0 t_2+\Phi)]$$
$$=\frac{a^2}{2}E[\cos(\omega_0 t_1-\omega_0 t_2)+\cos(\omega_0 t_1+\omega_0 t_2+2\Phi)]$$
$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega_0(t_2-t_1)$$

$$K_X(t_1,t_2)=E[(X(t_1)-m_X(t_1))(X(t_2)-m_X(t_2))]$$
$$=E[X(t_1)X(t_2)]$$
$$=R_X(t_1,t_2)=\frac{a^2}{2}\cos\omega_0(t_2-t_1)$$

二、随机过程的微分与积分

（一）随机过程的导数及其特征

随机过程$X(t)$的导数可定义为

$$\dot{X}(t)=\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t} \tag{2.24}$$

若过程$\dot{X}(t)$满足

$$\lim_{\Delta t\to 0}E\left[\left(\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}-\dot{X}(t)\right)^2\right]=0 \tag{2.25}$$

则称过程$X(t)$在t时刻具有均方导数。

$\dot{X}(t)$的数学期望、相关函数分别为

$$m_{\dot{X}}(t)=E[\dot{X}(t)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E[X(t)]=\dot{m}_X(t) \tag{2.26}$$

$$R_{\dot{X}}(t_1,t_2)=\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2} \tag{2.27}$$

（二）随机过程的积分及其特征

随机过程$X(t)$在确定区间$[a,b]$上的积分Y是一个随机变量，即

$$Y=\int_a^b X(t)\mathrm{d}t \tag{2.28}$$

若有

$$\lim_{\Delta t_i\to 0}E\left[\left(Y-\sum_{i=1}^{n}X(t_i)\Delta t_i\right)^2\right]=0 \tag{2.29}$$

则称随机变量

$$Y=\int_a^b X(t)\mathrm{d}t=\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}X(t_i)\Delta t_i \tag{2.30}$$

为过程$X(t)$在确定区间$[a,b]$上的均方积分。

式（2.28）可推广到带有“权函数”的随机过程的积分

$$Y(t)=\int_a^b X(\lambda)h(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda \tag{2.31}$$

这时，$Y(t)$是个新的随机过程。

若 $Y(t)=\int_0^t X(\lambda)\mathrm{d}\lambda$，则有

$$m_Y(t)=\int_0^t m_X(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{2.32}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_X(\lambda,\lambda')\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\lambda' \tag{2.33}$$

（三）例解

〔例2.4〕 数学期望为$m_X(t)=5\sin t$、相关函数为$R_X(t_1,t_2)=3\mathrm{e}^{-0.5(t_2-t_1)^2}$的随机信号$X(t)$输入微分电路，该电路输出随机信号$Y(t)=\dot{X}(t)$。求$Y(t)$的均值和相关函数。

解： 首先，我们根据数学期望的定义及式(2.26)，得到$Y(t)$的均值为

$$E[Y(t)]=E[\dot{X}(t)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E[X(t)]=\dot{m}_X(t)=5\cos t$$

然后，由相关函数的定义及式（2.27），求得$Y(t)$的相关函数为

$$R_Y(t_1,t_2)=R_{\dot{X}}(t_1,t_2)=\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\left[3\mathrm{e}^{-0.5(t_2-t_1)^2}\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial t_2}\left[(t_2-t_1)\cdot 3\mathrm{e}^{-0.5(t_2-t_1)^2}\right]$$

$$=3\mathrm{e}^{-0.5(t_2-t_1)^2}\left[1-(t_2-t_1)^2\right]$$

〔例2.5〕 设随机信号 $X(t)=V\mathrm{e}^{3t}\cos 2t$，其中$V$是均值为5、方差为1的随机变量。现设新的随机信号 $Y(t)=$

$\int_0^t X(\lambda)\mathrm{d}\lambda$。试求$Y(t)$的均值、相关函数、协方差函数和方差。

解：因为$E[V]=5$，$D[V]=1$，于是

$$E[V^2]=D[V]+E^2[V]=1+5^2=26$$

故我们能求出$X(t)$的均值、相关函数分别为

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[V\mathrm{e}^{3t}\cos 2t]=\mathrm{e}^{3t}\cos 2tE[V]$$
$$=5\mathrm{e}^{3t}\cos 2t$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E[V\mathrm{e}^{3t_1}\cos 2t_1\cdot V\mathrm{e}^{3t_2}\cos 2t_2]$$
$$=\mathrm{e}^{3(t_1+t_2)}\cos 2t_1\cos 2t_2E[V^2]$$
$$=26\mathrm{e}^{3(t_1+t_2)}\cos 2t_1\cos 2t_2$$

随之，由式(2.32)，求得$Y(t)$的均值为

$$m_Y(t)=\int_0^t m_X(\lambda)\mathrm{d}\lambda=5\int_0^t \mathrm{e}^{3\lambda}\cos 2\lambda\mathrm{d}\lambda$$

分部积分两次，得到

$$m_Y(t)=\frac{5}{13}[\mathrm{e}^{3t}(2\sin 2t+3\cos 2t)-3]$$

由式(2.33)，求得$Y(t)$的相关函数为

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_X(\lambda,\lambda')\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\lambda'$$
$$=26\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\mathrm{e}^{3(\lambda+\lambda')}\cos 2\lambda\cos 2\lambda'\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\lambda'$$
$$=\frac{26}{169}[\mathrm{e}^{3t_1}(2\sin 2t_1+3\cos 2t_1)-3]$$
$$\times[\mathrm{e}^{3t_2}(2\sin 2t_2+3\cos 2t_2)-3]$$

由式(2.17)，可得$Y(t)$的协方差函数为

$$K_Y(t_1,t_2)=R_Y(t_1,t_2)-m_Y(t_1)m_Y(t_2)$$
$$=\frac{1}{169}[\mathrm{e}^{3t_1}(2\sin 2t_1+3\cos 2t_1)-3]$$

$$\times\left[e^{3t_2}(2\sin 2t_2+3\cos 2t_2)-3\right]$$

最后，求得$Y(t)$的方差为

$$\sigma_Y^2(t)=K_Y(t,t)=\frac{1}{169}\left[e^{3t}(2\sin 2t+3\cos 2t)-3\right]^2$$

三、平稳随机过程和遍历过程

（一）平稳随机过程

对于任意的n和ε，若随机过程$X(t)$的n维概率密度满足

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon,\cdots,t_n+\varepsilon) \tag{2.34}$$

则称$X(t)$为严（或狭义）平稳过程。它有如下性质

（1）一维概率密度与时间无关。即

$$f_X(x_1;t_1)=f_X(x_1;t_1+\varepsilon)=f_X(x_1),\quad \varepsilon=-t_1\text{时} \tag{2.35}$$

并有

$$E[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x_1f_X(x_1)\mathrm{d}x_1=m_X \tag{2.36}$$

$$E[X^2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x_1^2f_X(x_1)\mathrm{d}x_1=\Psi_X^2 \tag{2.37}$$

$$D[X(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_X)^2f_X(x_1)\mathrm{d}x_1=\sigma_X^2 \tag{2.38}$$

（2）二维概率密度仅与时间差τ有关。即

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_X(x_1,x_2;t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon)$$
$$=f_X(x_1,x_2;\tau),\quad \varepsilon=-t_1\quad 及\quad \tau=t_2-t_1 \tag{2.39}$$

并有

$$R_X(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_X(x_1,x_2;\tau)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=R_X(\tau) \tag{2.40}$$

$$K_X(t_1,t_2)=K_X(\tau)=R_X(\tau)-m_X^2 \tag{2.41}$$

$$K_X(0)=R_X(0)-m_X^2 \tag{2.42}$$

若随机过程$X(t)$满足

$$\begin{cases} E[X]=m_X=\text{常数} \\ R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=R_X(\tau),\ \tau=t_2-t_1 \\ E[X^2(t)]<\infty \end{cases} \tag{2.43}$$

则称$X(t)$为宽（或广义）平稳过程。

（二）遍历过程

若随机过程$X(t)$的各种时间平均（时间足够长）依概率1收敛于相应的集合平均，则称过程$X(t)$具有严格（或狭义）遍历性，并称该过程为严格（或狭义）遍历过程，简称严遍历过程。

我们分别定义

$$A\langle X(t)\rangle=\overline{X(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\mathrm{d}t \tag{2.44}$$

$$\mathscr{R}_X(t,t+\tau)=\overline{X(t)X(t+\tau)}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)\mathrm{d}t \tag{2.45}$$

为过程$X(t)$的时间均值和时间（自）相关函数。

设$X(t)$为一平稳过程，若下二式

$$A\langle X(t)\rangle=\overline{X(t)}=E[X(t)]=m_X \tag{2.46}$$

$$\mathscr{R}_X(\tau)=\overline{X(t)X(t+\tau)}=E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau) \tag{2.47}$$

依概率1成立，则称$X(t)$是宽（或广义）遍历过程。

对于遍历过程$X(t)$，有

$$E[X(t)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\mathrm{d}t \tag{2.48}$$

$$R_X(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t \tag{2.49}$$

$$R_X(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)\mathrm{d}t \tag{2.50}$$

$$\sigma_X^2=K_X(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)-m_X]^2\mathrm{d}t \tag{2.51}$$

（三）平稳过程相关函数的性质

1. $$R_X(0)=E[X^2(t)]=\Psi_X^2\geqslant 0 \tag{2.52}$$

2. $$R_X(\tau)=R_X(-\tau) \tag{2.53}$$

$$K_X(\tau)=K_X(-\tau) \tag{2.54}$$

3. $$R_X(0)\geqslant|R_X(\tau)| \tag{2.55}$$

$$K_X(0)=\sigma_X^2\geqslant|K_X(\tau)| \tag{2.56}$$

4. 对于周期平稳过程 $X(t)=X(t+T)$（T 为过程的周期），有

$$R_X(\tau)=R_X(\tau+T) \tag{2.57}$$

5. 若平稳过程 $X(t)$ 含有一个周期分量，则 $R_X(\tau)$ 也含有一个同周期的周期分量。

6. 若平稳过程中不含有任何周期分量，则有

$$\lim_{|\tau|\to\infty}R_X(\tau)=R_X(\infty)=m_X^2 \tag{2.58}$$

$$\lim_{|\tau|\to\infty}K_X(\tau)=K_X(\infty)=0 \tag{2.59}$$

7. 若平稳过程含有平均分量（均值）m_X，则有

$$R_X(\tau)=K_X(\tau)+m_X^2 \tag{2.60}$$

又若该过程中不含任何周期分量，则有

$$\sigma_X^2=R_X(0)-R_X(\infty) \tag{2.61}$$

8. 平稳过程的自相关函数必须满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\geqslant 0 \tag{2.62}$$

平稳过程$X(t)$ 的（自）相关系数定义为

$$r_X(\tau)=\frac{K_X(\tau)}{K_X(0)}=\frac{R_X(\tau)-m_X^2}{\sigma_X^2} \tag{2.63}$$

显然，$r_X(\tau)$具有与$K_X(\tau)$相同的特性，且有 $r_X(0)=1$及$|r_X(\tau)|\leqslant 1$。

相关时间τ_0可定义为

$$\tau_0=\int_0^{\infty}r_X(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.64}$$

（四）例解

〔**例2.6**〕 已知随机过程$X(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$，式中$\omega_0$为常数；$A$与$B$是两个具有不同概率密度的独立的随机变量，且它们的均值皆为零、方差皆为σ^2。证明$X(t)$是宽平稳的、而不是严平稳的随机过程。

证：首先证明$X(t)$是宽平稳过程。由题意可知：$E[A]=E[B]=0$，$D[A]=D[B]=\sigma^2$，$E[AB]=E[A]E[B]=0$，$E[A^2]=E[B^2]=\sigma^2$。不难得到

$$\begin{aligned}E[X(t)]&=E[A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t]\\&=E[A]\cos\omega_0 t+E[B]\sin\omega_0 t=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_X(t,t+\tau)&=E[X(t)X(t+\tau)]\\&=E[(A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t)(A\cos\omega_0(t+\tau)\\&\quad+B\sin\omega_0(t+\tau))]=E[A^2\cos\omega_0 t\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau)\\&\quad+AB\cos\omega_0 t\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau)+AB\sin\omega_0 t\cos(\omega_0 t\\&\quad+\omega_0\tau)+B^2\sin\omega_0 t\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau)]\\&=E[A^2]\cos\omega_0 t\cos(\omega_0 t+\omega_0\tau)\\&\quad+E[B^2]\sin\omega_0 t\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau)\\&=\sigma^2\cos\omega_0\tau=R_X(\tau)\end{aligned}$$

$$E[X^2(t)]=R_X(0)=\sigma^2<\infty$$

可见，$X(t)$是满足式（2.43）的，故$X(t)$为一宽平稳过程。

接着，证明过程$X(t)$不是严平稳的。因为不知道$X(t)$的概率密度的具体形式，然而，我们能求得$X(t)$的三阶矩函数

$$\begin{aligned}E[X^3(t)]&=E[(A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t)^3]\\&=E[A^3\cos^3\omega_0 t+3A^2B\cos^2\omega_0 t\sin\omega_0 t\\&\quad+3AB^2\cos\omega_0 t\sin^2\omega_0 t+B^3\sin^3\omega_0 t]\\&=E[A^3]\cos^3\omega_0 t+E[B^3]\sin^3\omega_0 t\end{aligned}$$

由此看出，在一般情况下，$X(t)$的三阶矩与t有关。所以，

$X(t)$ 不是严平稳过程。

〔例2.7〕 已知随机过程$X(t)=t^2+A\sin t+B\cos t$，式中A、B皆为随机变量，并有：$E[A]=E[B]=0$，$D[A]=D[B]=10$，$E[AB]=0$。试分别讨论过程$X(t)$、$\mathring{X}(t)$的平稳性。

解：（1）对于过程$X(t)$，因为

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[t^2+A\sin t+B\cos t]$$
$$=t^2+E[A]\sin t+E[B]\cos t=t^2$$

可见，$X(t)$的均值与t有关，故$X(t)$不是宽平稳过程。

（2）对于中心化过程

$$\mathring{X}(t)=X(t)-m_X(t)=t^2+A\sin t+B\cos t-t^2$$
$$=A\sin t+B\cos t$$

因为

$$m_{\mathring{X}}(t)=E[\mathring{X}(t)]=E[A]\sin t+E[B]\cos t=0$$
$$R_{\mathring{X}}(t,t+\tau)=E[\mathring{X}(t)\mathring{X}(t+\tau)]$$
$$=E[(A\sin t+B\cos t)(A\sin(t+\tau)+B\cos(t+\tau))]$$
$$=E[A^2]\sin t\sin(t+\tau)+E[AB]\sin t\cos(t+\tau)$$
$$+E[AB]\cos t\sin(t+\tau)+E[B^2]\cos t\cos(t+\tau)$$
$$=E[A^2]\sin t\sin(t+\tau)+E[B^2]\cos t\cos(t+\tau)$$
$$=10\cos\tau=R_{\mathring{X}}(\tau)$$
$$E[\mathring{X}^2(t)]=R_{\mathring{X}}(0)=10<\infty$$

所以，$\mathring{X}(t)$为宽平稳过程。

〔例2.8〕 设随机过程$Z(t)=X(t)+Y$，其中$X(t)$是一平稳过程，Y是与$X(t)$无关的随机变量。试讨论过程$Z(t)$的遍历性。

解：由定义可知，遍历过程的前提是它必为平稳过程。本题虽未说明过程$Z(t)$是否具有平稳性，但是，我们可根据条件验证之。

因为

$$E[X(t)]=m_X,\quad R_X(t,t+\tau)=R_X(\tau)$$
$$E[X^2(t)]<\infty,\quad E[X(t)Y]=E[X(t)]E[Y]=m_Xm_Y$$

于是，可得

$$m_Z(t)=E[Z(t)]=E[X(t)+Y]$$
$$=E[X(t)]+E[Y]=m_X+m_Y=\text{常数}$$
$$R_Z(t,t+\tau)=E[Z(t)Z(t+\tau)]$$
$$=E[(X(t)+Y)(X(t+\tau)+Y)]$$
$$=E[X(t)X(t+\tau)]+E[X(t)]E[Y]$$
$$+E[X(t+\tau)]E[Y]+E[Y^2]$$
$$=R_X(\tau)+2m_Xm_Y+E[Y^2]=R_Z(\tau)$$
$$E[Z^2(t)]=R_Z(0)=R_X(0)+2m_Xm_Y+E[Y^2]<\infty$$

故过程$Z(t)$为宽平稳的。

然而，由于

$$A\langle Z(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[X(t)+Y]\mathrm{d}t$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\mathrm{d}t+Y$$

其中第一项$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\mathrm{d}t$不管是随机变量，还是常数；而第二项$Y$总是个随机变量。因此，$A\langle Z(t)\rangle$也是个随机变量，即

$$A\langle Z(t)\rangle\neq E[Z(t)]$$

所以，$Z(t)$不是宽遍历过程。

〔例2.9〕 图2.4中所示的四条函数曲线是否是平稳过程的正确的自相关函数曲线？为什么？若是的话，说明这些平稳过程有无平均分量、周期性，以及波形起伏的快慢。

解：因图 2.4(a) 的$f(\tau)$违反了式 (2.55)，故它不是平稳过程的正确的自相关函数曲线。

因图2.4(b)、(c)、(d) 的$f(\tau)$均能满足上述平稳过程相关函数的性质，故它们皆为平稳过程的正确的相关函数曲线。另外，对于图 (b)，有平均分量，无周期性，过程的波形起伏较慢；对于图 (c)，无平均分量，有周期性，过程的波形起伏极快

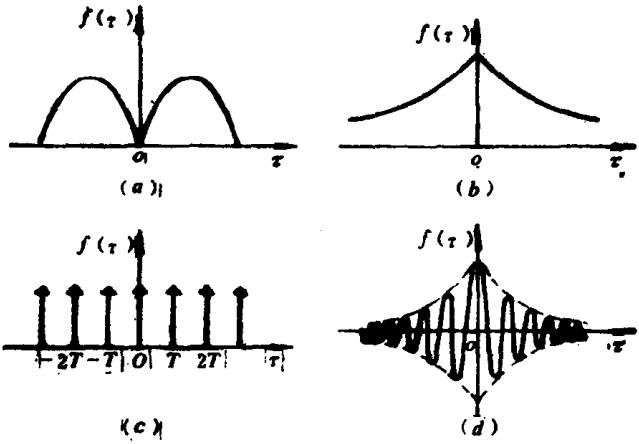


图 2.4

（因相关函数为 δ 函数）；对于图（d），平均分量、周期性皆无，过程的载波波形起伏较快、包络波形起伏较慢，且正负交替地变化。

〔例2.10〕 根据图2.5，写出平稳过程$X(t)$的自相关函数$R_X(\tau)$的表达式，并求过程$X(t)$的均值、均方值、自协方差函数和方差。

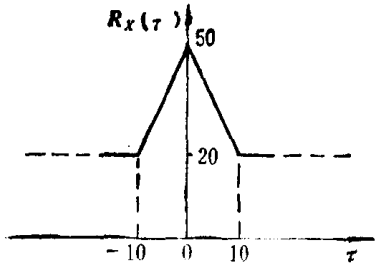


图2. 5

解：根据图2.5，不难写出过程$X(t)$的自相关函数为

$$R_X(\tau)=\begin{cases}20+30\left[1-\dfrac{|\tau|}{10}\right], & |\tau|\leqslant 10\\ 20, & |\tau|>10\end{cases}$$

（1）由式(2.58)，可求得

$$m_X^2=R_X(\infty)=20$$

故$X(t)$的均值为

$$m_X=\pm\sqrt{20}$$

（2）由式(2.52)，很容易得到$X(t)$的均方值

$$E[X^2(t)]=R_X(0)=50$$

（3）由式(2.60)，可求得$X(t)$的自协方差函数

$$K_X(\tau)=R_X(\tau)-m_X^2=\begin{cases}30\left[1-\dfrac{|\tau|}{10}\right], & |\tau|\leqslant 10\\ 0, & |\tau|>10\end{cases}$$

（4）过程$X(t)$的方差为

$$\sigma_X^2=E[X^2(t)]-m_X^2=50-20=30$$

〔例2.11〕 设平稳过程$X(t)$和$Y(t)$的自协方差函数分别为

$$K_X(\tau)=\frac{1}{2}e^{-2a|\tau|},\quad K_Y(\tau)=\frac{\sin a\tau}{a\tau}$$

式中a为正的常数。求它们的相关系数和相关时间；并判断哪个过程的起伏速度快。

解：由过程的协方差函数，极易求得$X(t)$、$Y(t)$的方差分别为

$$\sigma_X^2=K_X(0)=\frac{1}{2}$$

$$\sigma_Y^2=K_Y(0)=1$$

于是，根据定义，我们能得到$X(t)$、$Y(t)$的相关系数分别为

$$r_X(\tau)=\frac{K_X(\tau)}{K_X(0)}=e^{-2a|\tau|}$$

$$r_Y(\tau)=\frac{K_Y(\tau)}{K_Y(0)}=\frac{\sin a\tau}{a\tau}$$

从而，可求得$X(t)$、$Y(t)$的相关时间分别为

$$\tau_{0X}=\int_0^\infty r_X(\tau)d\tau=\int_0^\infty e^{-2a\tau}\,d\tau=\frac{1}{2a}$$

$$\tau_{0Y}=\int_0^{\infty} r_Y(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^{\infty}\frac{\sin a\tau}{a\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{\pi}{2a}$$

由此可知：$\tau_{0X}<\tau_{0Y}$。所以，过程$X(t)$比$Y(t)$的起伏速度快。

四、随机过程的联合概率分布和互相关函数

（一）两个随机过程的联合概率分布

设两个随机过程$X(t)$、$Y(t)$的概率密度分别为

$$f_X(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)$$

$$f_Y(y_1,\cdots,y_m;t'_1,\cdots,t'_m)$$

该二过程的$n+m$维联合分布函数定义为

$$F_{XY}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n;t'_1,\cdots,t'_m)$$
$$=P\{X(t_1)\leqslant x_1,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n;Y(t'_1)\leqslant y_1,\cdots,Y(t'_m)\leqslant y_m\}$$

(2.65)

它们的$n+m$维联合概率密度为

$$f_{XY}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n;t'_1,\cdots,t'_m)$$
$$=\frac{\partial^{n+m}F_{XY}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n;t'_1,\cdots,t'_m)}{\partial x_1\cdots\partial x_n\partial y_1\cdots\partial y_m}$$

(2.66)

若有

$$F_{XY}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n;t'_1,\cdots,t'_m)$$
$$=F_X(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)F_Y(y_1,\cdots,y_m;t'_1,\cdots,t'_m)$$

(2.67)

或

$$f_{XY}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;t_1,\cdots,t_n;t'_1,\cdots,t'_m)$$
$$=f_X(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)f_Y(y_1,\cdots,y_m;t'_1,\cdots,t'_m)$$

(2.68)

则称过程$X(t)$与$Y(t)$相互独立。

若两个过程的联合概率分布不随时间平移而变化，则称该二过程为联合严平稳或严平稳相依。

（二）互相关函数

两个随机过程$X(t)$、$Y(t)$的互相关函数、互协方差函数分

别定义为

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_{XY}(x,y;t_1,t_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (2.69)$$

$$K_{XY}(t_1,t_2)=E[\mathring{X}(t_1)\mathring{Y}(t_2)]$$

$$=E[(X(t_1)-m_X(t_1))(Y(t_2)-m_Y(t_2))]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x-m_X(t_1)][y-m_Y(t_2)]f_{XX}(x,y;t_1,t_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (2.70)$$

且有

$$K_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2) \quad (2.71)$$

若过程$X(t)$ 和$Y(t)$ 对任意两时刻t_1、t_2皆为

$$R_{XY}(t_1,t_2)=0 \quad (2.72)$$

或
$$K_{XY}(t_1,t_2)=-m_X(t_1)m_Y(t_2) \quad (2.73)$$

则称过程$X(t)$ 和$Y(t)$ 是正交的。

若有

$$K_{XY}(t_1,t_2)=0 \quad (2.74)$$

或
$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]=E[X(t_1)]E[Y(t_2)]$$

$$=m_X(t_1)m_Y(t_2) \quad (2.75)$$

则称过程$X(t)$ 和$Y(t)$ 互为不相关的。

如果两个宽平稳过程$X(t)$ 和$Y(t)$ 的互相关函数只是单变量τ的函数，即

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]=R_{XY}(\tau),\ \tau=t_2-t_1 \quad (2.76)$$

则称过程$X(t)$ 和$Y(t)$ 为联合宽平稳或宽平稳相依。联合宽平稳过程的互相关函数的性质如下：

(1)
$$R_{XY}(\tau)=R_{YX}(-\tau) \quad (2.77)$$

$$K_{XY}(\tau)=K_{YX}(-\tau) \quad (2.78)$$

(2)
$$|R_{XY}(\tau)|^2\leqslant R_X(0)R_Y(0) \quad (2.79)$$

$$|K_{XY}(\tau)|^2\leqslant K_X(0)K_Y(0)=\sigma_X^2\sigma_Y^2 \quad (2.80)$$

（3）
$$|R_{XY}(\tau)|\leqslant\frac{1}{2}[R_X(0)+R_Y(0)] \tag{2.81}$$

$$|K_{XY}(\tau)|\leqslant\frac{1}{2}[K_X(0)+K_Y(0)]=\frac{1}{2}(\sigma_X^2+\sigma_Y^2) \tag{2.82}$$

（4）互相关系数

$$r_{XY}(\tau)=\frac{K_{XY}(\tau)}{\sqrt{K_X(0)K_Y(0)}}=\frac{R_{XY}(\tau)-m_Xm_Y}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{2.83}$$

显然，$|r_{XY}(\tau)|\leqslant 1$；当$r_{XY}(\tau)=0$时，两平稳过程$X(t)$和$Y(t)$互不相关。

联合平稳过程$X(t)$和$Y(t)$的时间互相关函数定义为

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_{XY}(\tau)&=\overline{X(t)Y(t+\tau)}\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)Y(t+\tau)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{2.84}$$

若它依概率1收敛于集合互相关函数$R_{XY}(\tau)$，即

$$\mathscr{R}_{XY}(\tau)=\overline{X(t)Y(t+\tau)}=E[X(t)Y(t+\tau)]=R_{XY}(\tau) \tag{2.85}$$

则称过程$X(t)$和$Y(t)$具有联合宽遍历性。

（三）例解

〔例2.12〕 设两个平稳随机过程$X(t)=\cos(t+\Phi)$和$Y(t)=\sin(t+\Phi)$，其中Φ是在$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量。试问这两个过程是否平稳相依？它们是否正交、不相关、统计独立？说明之。

解： 因为平稳过程$X(t)$和$Y(t)$的互相关函数为

$$\begin{aligned}R_{XY}(t,t+\tau)&=E[X(t)Y(t+\tau)]\\&=E[\cos(t+\Phi)\sin(t+\tau+\Phi)]\\&=\frac{1}{2}E[\sin(2t+\tau+2\Phi)+\sin\tau]=\frac{1}{2}\sin\tau=R_{XY}(\tau)\end{aligned}$$

故这两个过程是平稳相依的。

由于$R_{XY}(t,t+\tau)=\frac{1}{2}\sin\tau$，它仅在$\tau=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,$

…）时等于零，这时，$X(t)$、$Y(t)$ 的取值（随机变量）才是正交的。而对于其它τ值，都不能满足条件式(2.72)，故过程$X(t)$与$Y(t)$互不正交。

又因为$X(t)$和$Y(t)$的均值分别为

$$m_X(t)=E[X(t)]=E[\cos(t+\Phi)]=0$$

$$m_Y(t+\tau)=E[Y(t+\tau)]=E[\sin(t+\tau+\Phi)]=0$$

故得到互协方差函数

$$K_{XY}(t,t+\tau)=R_{XY}(t,t+\tau)-m_X(t)m_Y(t+\tau)$$

$$=R_{XY}(t,t+\tau)=R_{XY}(\tau)$$

即

$$K_{XY}(\tau)=\frac{1}{2}\sin\tau$$

由于$K_{XY}(\tau)$仅在$\tau=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$等于零，此时，过程$X(t)$、$Y(t)$的状态（随机变量）才是不相关的；而在$\tau\neq n\pi$时，$K_{XY}(\tau)\neq0$，故从整体来看，过程$X(t)$与$Y(t)$是相关的，因而，它们是统计不独立的。

五、复随机过程

（一）复随机过程

我们定义复随机过程$Z(t)$为

$$Z(t)=X(t)+\mathrm{j}Y(t) \tag{2.86}$$

复随机过程$Z(t)$的数学期望、方差分别定义为

$$m_Z(t)=E[Z(t)]=m_X(t)+\mathrm{j}m_Y(t) \tag{2.87}$$

$$D_Z(t)=E[|\mathring{Z}(t)|^2],\quad \mathring{Z}(t)=Z(t)-m_Z(t) \tag{2.88}$$

并有

$$D_Z(t)=D_X(t)+D_Y(t) \tag{2.89}$$

复随机过程$Z(t)$的自相关函数、自协方差函数分别定义为

$$R_Z(t,t+\tau)=E[Z^*(t)Z(t+\tau)] \tag{2.90}$$

$$K_Z(t,t+\tau)=E[\mathring{Z}^*(t)\mathring{Z}(t+\tau)]$$

$$=E[(Z(t)-m_Z(t))^*(Z(t+\tau)-m_Z(t+\tau))] \tag{2.91}$$

并有

$$K_Z(t,t)=D_Z(t) \tag{2.92}$$

若$Z(t)$为平稳过程，则有

$$m_Z(t)=m_Z=m_X+\mathrm{j}m_Y \tag{2.93}$$

$$R_Z(t,t+\tau)=R_Z(\tau) \tag{2.94}$$

$$K_Z(t,t+\tau)=K_Z(\tau) \tag{2.95}$$

换言之，若复过程$Z(t)$满足式（2.93）、（2.94），则称$Z(t)$为宽平稳的复过程。

复随机过程$Z_1(t)$和$Z_2(t)$的互相关函数、互协方差函数分别定义为

$$R_{Z_1Z_2}(t,t+\tau)=E[Z_1^*(t)Z_2(t+\tau)] \tag{2.96}$$

$$\begin{aligned}K_{Z_1Z_2}(t,t+\tau)&=E[\mathring{Z}_1^*(t)\,\mathring{Z}_2(t+\tau)]\\&=E[(Z_1(t)-m_{Z_1}(t))^*(Z_2(t+\tau)-m_{Z_2}(t+\tau))]\end{aligned} \tag{2.97}$$

若两个复过程$Z_1(t)$和$Z_2(t)$联合平稳，则有

$$R_{Z_1Z_2}(t,t+\tau)=R_{Z_1Z_2}(\tau) \tag{2.98}$$

$$K_{Z_1Z_2}(t,t+\tau)=K_{Z_1Z_2}(\tau) \tag{2.99}$$

若复过程$Z_1(t)$与$Z_2(t)$互不相关，则有

$$K_{Z_1Z_2}(t,t+\tau)=0 \tag{2.100}$$

若复过程$Z_1(t)$与$Z_2(t)$正交，则有

$$R_{Z_1Z_2}(t,t+\tau)=0 \tag{2.101}$$

（二）例解

〔例2.13〕 设复随机过程为

$$Z(t)=\sum_{n=1}^{N}A_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_n t}$$

其中$A_n(n=1,2,\cdots,N)$是相互独立的实正态随机变量，其均值为零、方差为σ_n^2；θ_n为非随机的变量。求复过程$Z(t)$的均值、相关函数和协方差函数。

解：由欧拉公式$\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}=\cos x+\mathrm{j}\sin x$可知

$$Z(t)=\sum_{n=1}^{N}A_n\cos\theta_n t+\mathrm{j}\sum_{n=1}^{N}A_n\sin\theta_n t$$

因为$Z(t)$的实部$X(t)=\sum_{n=1}^{N}A_n\cos\theta_n t$和虚部$Y(t)=\sum_{n=1}^{N}A_n\sin\theta_n t$均为正态随机变量$A_n(n=1,2,\cdots,N)$的线性组合，故它们也都是正态的。所以，由定义式可分别求得$Z(t)$的均值、相关函数和协方差函数如下：

$$m_Z(t)=E[Z(t)]=E[X(t)]+\mathrm{j}E[Y(t)]=0$$

$$R_Z(t,t+\tau)=E[Z^*(t)Z(t+\tau)]$$

$$=E\left[\sum_{n=1}^{N}A_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_k t}\sum_{m=1}^{N}A_m\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_m(t+\tau)}\right]$$

$$=\sum_{n,m=1}^{N}E[A_nA_m]\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\theta_m(t+\tau)-\theta_n t]}$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_n\tau}=R_Z(\tau)$$

$$K_Z(t,t+\tau)=E[(Z(t)-m_Z(t))^*(Z(t+\tau)-m_Z(t+\tau))]$$

$$=E[Z^*(t)Z(t+\tau)]=R_Z(t,t+\tau)$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_n\tau}=K_Z(\tau)$$

由此可见，复过程$Z(t)$是宽平稳的。

六、离散时间随机过程

（一）离散时间随机过程的定义

对连续时间随机过程$X(t)$进行等时间间隔采样，便可得到离散时间随机过程$X(n\Delta t)$，若采样时间间隔$\Delta t=1$，则离散时间随机过程可简记为$X(n)(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。

实际上，离散时间随机过程就是由一串随机变量$\cdots,X_1,X_2,X_3,\cdots$构成的序列，其中$X_n=X(n)$。

（二）离散时间随机过程的概率分布

$X(n)$ 的一维概率分布函数为

$$F_X(x_1;n_1)=P\{X_{n_1}\leqslant x_1\} \tag{2.102}$$

其一维概率密度为

$$f_X(x_1;n_1)=\frac{\partial F_X(x_1;n_1)}{\partial x_1} \tag{2.103}$$

类似地，随机序列$X(n)$ 的N维的分布函数、概率密度分别定义为

$$\begin{aligned}&F_X(x_1,x_2,\cdots,x_N;n_1,n_2,\cdots,n_N)\\&=P\{X_{n_1}\leqslant x_1,X_{n_2}\leqslant x_2,\cdots,X_{n_N}\leqslant x_N\}\end{aligned} \tag{2.104}$$

$$\begin{aligned}&f_X(x_1,x_2,\cdots,x_N;n_1,n_2,\cdots,n_N)\\&=\frac{\partial^N F_X(x_1,x_2,\cdots,x_N;n_1,n_2,\cdots,n_N)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_N}\end{aligned} \tag{2.105}$$

（三）离散时间随机过程的数字特征

离散时间过程$X(n)$ 及其函数$g[X(n)]$的数学期望分别定义为

$$m_X(n)=E[X(n)]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x;n)\mathrm{d}x \tag{2.106}$$

$$E[g[X(n)]]=E[g(X_n)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_X(x;n)\mathrm{d}x \tag{2.107}$$

随机序列$X(n)$ 的均方值、方差分别定义为

$$\Psi_X^2(n)=E[X^2(n)]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_X(x;n)\mathrm{d}x \tag{2.108}$$

$$\sigma_X^2(n)=D[X(n)]=E[(X(n)-m_X(n))^2] \tag{2.109}$$

且有

$$\sigma_X^2(n)=E[X^2(n)]-E^2[X(n)]=\Psi_X^2(n)-m_X^2(n) \tag{2.110}$$

$X(n)$ 的自相关函数、自协方差函数分别定义为

$$R_X(n_1,n_2)=E[X(n_1)X(n_2)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_X(x_1,x_2;n_1,n_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{2.111}$$

$$K_X(n_1,n_2)=E[(X(n_1)-m_X(n_1))(X(n_2)-m_X(n_2))] \tag{2.112}$$

且有

$$K_X(n_1,n_2)=R_X(n_1,n_2)-m_X(n_1)m_X(n_2) \tag{2.113}$$

若随机序列$X(n)$满足

$$\begin{cases}m_X(n)=E[X(n)]=m_X\\R_X(n_1,n_2)=E[X(n_1)X(n_2)]=R_X(m),m=n_2-n_1\\\Psi_X^2(n)=E[X^2(n)]=\Psi_X^2<\infty\end{cases} \tag{2.114}$$

则称$X(n)$为宽（或广义）平稳随机序列。

两个随机序列$X(n)$和$Y(n)$的互相关函数、互协方差函数分别定义为

$$R_{XY}(n_1,n_2)=E[X(n_1)Y(n_2)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_{XY}(x,y;n_1,n_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.115}$$

$$K_{XY}(n_1,n_2)=E[(X(n_1)-m_X(n_1))(Y(n_2)-m_Y(n_2))]$$

$$=R_{XY}(n_1,n_2)-m_X(n_1)m_Y(n_2) \tag{2.116}$$

若$X(n)$和$Y(n)$对任意两个离散时刻n_1、n_2皆有

$$R_{XY}(n_1,n_2)=0 \tag{2.117}$$

则称随机序列$X(n)$和$Y(n)$互为正交序列。

若有

$$K_{XY}(n_1,n_2)=0 \tag{2.118}$$

或

$$E[X(n_1)Y(n_2)]=E[X(n_1)]E[Y(n_2)] \tag{2.119}$$

则称随机序列$X(n)$和$Y(n)$互为不相关的。

若两宽平稳序列$X(n)$和$Y(n)$的互相关函数为

$$R_{XY}(n_1,n_2)=E[X(n_1)Y(n_2)]=R_{XY}(m),\ m=n_2-n_1 \tag{2.120}$$

则称它们为联合宽平稳或宽平稳相依。此时，它们的互协方差函数为

$$K_{XY}(n_1,n_2)=E[(X(n_1)-m_X)(Y(n_2)-m_Y)]=K_{XY}(m),\quad m=n_2-n_1 \tag{2.121}$$

且有

$$K_{XY}(m)=R_{XY}(m)-m_Xm_Y \tag{2.122}$$

若随机序列$X(n)$的各种时间平均依概率1收敛于相应的统计平均，则称此序列为严遍历序列。

随机序列$X(n)$的时间均值、时间自相关函数分别定义为

$$A\langle X(n)\rangle=\overline{X(n)}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}X_n \tag{2.123}$$

$$\mathscr{R}_X(n,n+m)=\overline{X(n)X(n+m)}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}X_nX_{n+m} \tag{2.124}$$

对于平稳随机序列$X(n)$，若有

$$A\langle X(n)\rangle=\overline{X(n)}=E[X(n)]=m_X \tag{2.125}$$

$$\mathscr{R}_X(m)=\overline{X(n)X(n+m)}=E[X(n)X(n+m)]=R_X(m) \tag{2.126}$$

两式皆依概率1成立，则称$X(n)$为（宽）遍历序列。并且，遍历序列$X(n)$有

$$E[X(n)]=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x(n) \tag{2.127}$$

$$R_X(m)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x(n)x(n+m) \tag{2.128}$$

两随机序列$X(n)$和$Y(n)$联合平稳时，它们的时间互相关函数定义为

$$\mathscr{R}_{XY}(m)=\overline{X(n)Y(n+m)}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}X(n)Y(n+m) \tag{2.129}$$

若

$$\mathscr{R}_{XY}(m)=R_{XY}(m) \tag{2.130}$$

依概率 1 成立，则称$X(n)$和$Y(n)$为联合（宽）遍历序列。

（四）平稳随机序列相关函数的性质

1.
$$K_X(m)=R_X(m)-m_X^2 \tag{2.131}$$
$$K_{XY}(m)=R_{XY}(m)-m_Xm_Y \tag{2.132}$$

2.
$$R_X(0)=E[X_n^2]=\Psi_X^2\geqslant 0 \tag{2.133}$$
$$K_X(0)=E[(X_n-m_X)^2]=\sigma_X^2\geqslant 0 \tag{2.134}$$

3.
$$R_X(m)=R_X(-m) \tag{2.135}$$
$$K_X(m)=K_X(-m) \tag{2.136}$$
$$R_{XY}(m)=R_{YX}(-m) \tag{2.137}$$
$$K_{XY}(m)=K_{YX}(-m) \tag{2.138}$$

4.
$$R_X(0)\geqslant|R_X(m)| \tag{2.139}$$
$$K_X(0)\geqslant|K_X(m)| \tag{2.140}$$
$$R_X(0)R_Y(0)\geqslant|R_{XY}(m)|^2 \tag{2.141}$$
$$K_X(0)K_Y(0)\geqslant|K_{XY}(m)|^2 \tag{2.142}$$

5. 若$Y(n)=X(n-n_0)$（n_0为某固定时刻），则有
$$R_Y(m)=R_X(m) \tag{2.143}$$
$$K_Y(m)=K_X(m) \tag{2.144}$$

6. 若平稳序列不含任何周期分量，则有
$$\lim_{|m|\to\infty}R_X(m)=R_X(\infty)=m_X^2 \tag{2.145}$$
$$\lim_{|m|\to\infty}K_X(m)=K_X(\infty)=0 \tag{2.146}$$

平稳序列的自相关系数定义为
$$r_X(m)=\frac{K_X(m)}{K_X(0)}=\frac{R_X(m)-m_X^2}{\sigma_X^2} \tag{2.147}$$

且有$r_X(0)=1$及$|r_X(m)|\leqslant 1$。

互相关系数定义为
$$r_{XY}(m)=\frac{K_{XY}(m)}{\sqrt{K_X(0)K_Y(0)}}=\frac{R_{XY}(m)-m_Xm_Y}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{2.148}$$

且有$|r_{XY}(m)|\leqslant 1$。$r_{XY}(m)=0$时，两平稳序列$X(n)$和$Y(n)$互不相关。

（五）例解

〔例2.14〕 对热噪声$X(t)$进行等时间间隔采样，便得到一随机序列$X(n)(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，它具有如下性质：（1）$\{X(n)\}$相互独立；（2） $X(n)$是$N(0,\sigma^2)$分布。试讨论序列$X(n)$的平稳性。

解：根据定义式及题设条件（2），可求得序列$X(n)$的均值、方差分别为

$$m_X(n)=E[X(n)]=0$$

$$D[X(n)]=E[(X(n)-m_X(n))^2]=E[X^2(n)]=\sigma^2$$

由定义式及题给性质，不难得到序列$X(n)$的自相关函数为

$$R_X(n,n+m)=E[X(n)X(n+m)]=\begin{cases}\sigma^2, & m=0\\ 0, & m\neq0\end{cases}$$

即

$$R_X(m)=\begin{cases}\sigma^2, & m=0\\ 0, & m\neq0\end{cases}$$

由此可见，序列$X(n)$的均值为零（常数），自相关函数仅与时间差m有关，故$X(n)$是宽平稳随机序列，又因它是正态的，从而，它也是严平稳随机序列。

七、正态随机过程

（一）正态随机过程的一般概念

若随机过程$X(t)$的任意n维概率分布皆为正态分布，则称之为正态（或高斯）过程。正态过程$X(t)$的n维概率密度及特征函数的矢量矩阵表达式分别为

$$f_X(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\boldsymbol{K}|^{1/2}}\exp\left[-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^T\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})}{2}\right] \tag{2.149}$$

$$C_X(\boldsymbol{u})=\exp\left(\mathrm{j}\,\boldsymbol{m}^T\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}\right) \tag{2.150}$$

（二）正态随机过程的性质

1．正态过程$X(t)$的n维概率密度完全由它的均值集合（或矩阵）、协方差函数集合（或矩阵）所确定。

2．若正态过程$X(t)$是宽平稳的，则也是严平稳的。

3．若正态过程$X(t)$在n个不同时刻采样所得一组随机变量X_1、X_2、…、X_n为两两互不相关时，则X_1、X_2、…、X_n也是统计独立的。

4．平稳正态过程$X(t)$与确定信号$S(t)$之和的概率分布仍为正态分布。

5．若正态过程$X(t)(t\in T)$在T上是均方可微的，则其导数$\dot{X}(t)$ $(t\in T)$也是正态过程。

6．若正态过程$X(t)(t\in T)$在T上是均方可积的，则积分

$$Y(t)=\int_a^t X(\lambda)\mathrm{d}\lambda,\quad a,t\in T \tag{2.151}$$

$$Y(t)=\int_a^b X(\lambda)h(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda,\quad a,b\in T \tag{2.152}$$

也是正态过程。

（三）例解

〔例2.15〕 设正态过程$X(t)$的均值为零、协方差函数为

$$K_X(t_i,t_k)=\mathrm{e}^{-|t_k-t_i|}$$

现在时刻$t=0,1,2,3$对过程$X(t)$采样，求$X(t)$的四维概率密度。

解：由式（2.149），可得

$$f_X(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\boldsymbol{K}|^{1/2}}\exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x}}{2}\right) \tag{1}$$

故解本题的关键是求协方差矩阵$\boldsymbol{K}$。而$\boldsymbol{K}$阵的元素已知为$K_{ik}=K_X(t_i,t_k)=\mathrm{e}^{-|t_k-t_i|}$，把具体时刻逐一代入，便可得到协方差矩阵

$$\boldsymbol{K}=\begin{Bmatrix}K_{00}&K_{01}&K_{02}&K_{03}\\K_{10}&K_{11}&K_{12}&K_{13}\\K_{20}&K_{21}&K_{22}&K_{23}\\K_{30}&K_{31}&K_{32}&K_{33}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1&\mathrm{e}^{-1}&\mathrm{e}^{-2}&\mathrm{e}^{-3}\\\mathrm{e}^{-1}&1&\mathrm{e}^{-1}&\mathrm{e}^{-2}\\\mathrm{e}^{-2}&\mathrm{e}^{-1}&1&\mathrm{e}^{-1}\\\mathrm{e}^{-3}&\mathrm{e}^{-2}&\mathrm{e}^{-1}&1\end{Bmatrix}$$

由（2）式可求得$\boldsymbol{K}^{-1}$及$|\boldsymbol{K}|$，再将它们代入（1）式，就能得到正态过程$X(t)$的四维概率密度。

Ⅲ. 习　题

2—1　两值半随机二进过程定义为

$$X(t)=A\text{或}-A,\quad (n-1)T<t<nT$$

其中值A与$-A$以等概率出现，T为一正常数，$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$。(1) 画出典型的样本函数图形；(2) 将此过程归类；(3) 该过程是确定性过程吗？

2—2　离散随机过程的样本函数皆为常数，即$X(t)=C=$可变常数，式中C是一离散随机变量，其可能值为$c_1=1$、$c_2=2$及$c_3=3$，且它们分别以概率0.6、0.3及0.1出现。（1）$X(t)$是确定性过程吗？(2) 求：在任意时刻t，$X(t)$的一维概率密度。

2—3　设随机振幅信号$X(t)=A\cos\omega_0 t$，其中ω_0为常数，A为标准正态随机变量。试求：$t=0$、$\pi/3\omega_0$、$\pi/2\omega_0$时，$X(t)$的一维概率密度。

2—4　设随机过程$X(t)=A+Bt$，其中A、B皆为随机变量。（1）求$E[X(t)]$及$R_X(t_1,t_2)$；(2) 若A与B相互独立，且它们的概率密度分别为$f_A(a)$与$f_B(b)$，求$X(t)$的一维概率密度$f_X(x;t)$。

2—5　设随机过程$X(t)$的均值为$m_X(t)$，协方差函数为$K_X(t_1,t_2)$；又知$\varphi(t)$是确定的时间函数。试求随机过程$Y(t)=X(t)+\varphi(t)$的均值和协方差函数。

2—6　设随机过程$X(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$，其中$\omega_0$为常数；$A$与$B$是相互独立的正态随机变量，且有：$E[A]=E[B]=0$，$E[A^2]=E[B^2]=\sigma^2$。试求$X(t)$的均值与自相关函数。

2—7　设随机过程$X(t)=Vt$，其中V是在(0，1)上均匀分布的随机变量。求过程$X(t)$的均值和自相关函数。

2—8　设随机过程$X(t)=V\sin 3t$，式中V是个随机变量，其均值为10、方差为0.2。求过程$X(t)$的均值、方差、相关函数和协方差函数。

2—9　设随机过程$X(t)=At+Bt^2$，式中A、B为两个互不相关的随机变量，且有：$E[A]=4$，$E[B]=7$，$D[A]=0.1$，$D[B]=2$。求过程$X(t)$

的均值、相关函数、协方差函数和方差。

2—10 设随机过程$X(t)=A\sin t+B\cos t$，式中A、B为两个互不相关的随机变量，且有：$E[A]=1$，$E[B]=8$，$D[A]=D[B]=4$。求过程$X(t)$的均值、方差、相关函数和协方差函数。

2—11 设随机过程$X(t)=A\cos 2t+B\sin t+t$，式中A、B为两个互不相关的随机变量，且有：$E[A]=1$，$E[B]=2$，$D[A]=3$，$D[B]=4$。求过程$X(t)$的均值、方差、相关函数和协方差函数。

2—12 已知随机过程$X(t)$，x是任一实数，定义另一个随机过程

$$Y(t)=\begin{cases}1, & X(t)\leqslant x\\ 0, & X(t)>x\end{cases}$$

试证：$Y(t)$的均值和自相关函数分别为$X(t)$的一维和二维分布函数。

2—13 已知随机过程$Y(t)$和常数a，试以$X(t)$的自相关函数表示出另一随机过程$X(t)=X(t+a)-X(t)$的自相关函数。

2—14 如果随机过程$X(t)$的导数存在，试证：

$$E\left[X(t)\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}\right]=\frac{\partial R_X(t,t)}{\partial t}$$

2—15 设随机过程$X(t)$的数学期望$E[X(t)]=t^2+4$。求另一随机过程$Y(t)=\dot{tX}(t)+t^2$的数学期望。

2—16 已知随机信号$X(t)=V\mathrm{e}^{3t}\cos 2t$，其中$V$是均值为4、方差为1的随机变量。设新的随机信号$Y(t)=\dot{X}(t)$。求$Y(t)$的均值、相关函数、协方差函数和方差。

2—17 设随机信号$X(t)$的均值为$\cos^2 t$、协方差函数为$\cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2$（$\omega_0$为常数），将$X(t)$输入到积分电路，该电路输出随机信号$Y(t)=\int_0^t X(\lambda)\mathrm{d}\lambda$。求$Y(t)$的均值、相关函数、协方差函数和方差。

2—18 已知随机过程：（1）$X(t)=V\cos 2t$，其中V是均值为5、方差为6的随机变量；（2）$X(t)=V\sin t$，其中V是均值为2、方差为3的随机变量。试求新随机过程$Y(t)=\int_0^t X(\lambda)\mathrm{d}\lambda$的均值、相关函数、协方差函数和方差。

2—19 已知随机信号$X(t)=V\cos 3t$，其中V是均值为1、方差为1的随机变量。设新的随机信号

$$Y(t)=\frac{1}{t}\int_0^t X(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

求$Y(t)$的均值、相关函数、协方差函数和方差。

2—20 设$X(t)$与$Y(t)$是两个相互独立的平稳随机过程。试证由它们的乘积构成的随机过程$Z(t)=X(t)Y(t)$也是平稳的。

2—21 已知随机过程$X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta)$，其中$\omega_0$为常数；$A$与$\Theta$为相互独立的两个随机变量，它们的概率密度分别为

$$f_A(a)=\begin{cases}\dfrac{a}{\sigma^2}e^{-a^2/2\sigma^2}, & a>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_\Theta(\theta)=\frac{1}{2\pi},\quad 0<\theta<2\pi$$

试问$X(t)$是否是广义平稳过程？为什么？

2—22 若两个随机过程$X(t)$、$Y(t)$都是非平稳过程

$$X(t)=A(t)\cos t,\quad Y(t)=B(t)\sin t$$

其中$A(t)$、$B(t)$为相互独立、各自平稳的随机过程，且它们的均值皆为零、自相关函数相等。试证这两个过程之和$Z(t)=X(t)+Y(t)$是宽平稳的。

2—23 如果$X(t)$为平稳过程，$Y=X(t_0)$是随机变量。试讨论新的随机过程$Z(t)=X(t)+Y$的平稳性。

2—24 设随机信号$X(t)=a\sin(\omega_0 t+\Phi)$，其中$a$、$\omega_0$皆为正的常数；$\Phi$是在$(0,\pi/2)$上概率密度为$f_\Phi(\varphi)=\cos\varphi$的随机变量。试讨论$X(t)$的平稳性。

2—25 设随机信号$X(t)=a\sin(\omega_0 t+\Phi)$，式中$a$、$\omega_0$皆为正的常数；$\Phi$为正态随机变量，其概率密度为

$$f_\Phi(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\varphi^2/2}$$

试讨论$X(t)$的平稳性。

2—26 设随机过程$Y(t)=X(t)\cos(\omega_0 t+\Theta)$，其中$X(t)$为广义平稳过程，它是幅度调制的；角载频$\omega_0$为常数；随机相位$\Theta$与$X(t)$无关、且均匀分布在$(-\pi,\pi)$上。(1) 求过程$Y(t)$的均值和自相关函数；(2) 过程$Y(t)$广义平稳吗？

2—27 已知随机过程$X(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$，式中$\omega_0$为常数；而$A$与$B$是具有不同概率密度，但有相同的方差$\sigma^2$、均值为零的不相关的随机变量。证明$X(t)$是宽平稳而不是严平稳的随机过程。

2—28 定义一随机过程$X(t)=A\cos\pi t$，式中A是具有均值为零、方差为σ_A^2的正态随机变量。（1）求$X(0)$及$X(1)$的一维概率密度；（2）$X(t)$是否为宽平稳过程？为什么？

2—29 随机过程$X(t)$由三个样本函数$X(t,\zeta_1)=2$、$X(t,\zeta_2)=2\cos t$及$X(t,\zeta_3)=3\sin t$组成，每个样本等概率出现。在任何意义上，该过程是平稳的吗？

2—30 平稳随机过程$X(t)$的自相关函数为

$$R_X(\tau)=4e^{-|\tau|}\cos\pi\tau+\cos3\pi\tau$$

求过程$X(t)$的均方值和方差。

2—31 已知两个随机过程

$$X(t)=A\cos t-B\sin t,\quad Y(t)=B\cos t+A\sin t$$

其中A、B是均值为零、方差为5的不相关的两个随机变量。试证过程$X(t)$、$Y(t)$各自平稳，而且是联合平稳的；并求出它们的互相关系数。

2—32 设随机过程$X(t)$和$Y(t)$单独和联合平稳。试求：（1）$Z(t)=X(t)+Y(t)$的自相关函数；（2）题（1）$X(t)$与$Y(t)$相互独立时的结果；（3）题（1）$X(t)$与$Y(t)$相互独立并具有零均值时的结果。

2—33 统计独立、零均值的随机过程$X(t)$和$Y(t)$分别有自相关函数

$$R_X(\tau)=e^{-|\tau|},\quad R_Y(\tau)=\cos2\pi\tau$$

求：（1）和过程$W_1(t)=X(t)+Y(t)$的自相关函数；（2）差过程$W_2(t)=X(t)-Y(t)$的自相关函数；（3）过程$W_1(t)$与$W_2(t)$的互相关函数。

2—34 已知随机过程$X(t)=a\sin(\omega_0t+\Theta)$，其中$a$和$\omega_0$皆为常数，$\Theta$是一个在$(-\pi,\pi)$上均匀分布的随机变量。现定义一个新的随机过程$Y(t)=X^2(t)$。求：（1）$Y(t)$的自相关函数；（2）$X(t)$与$Y(t)$的互相关函数。试问并证明：（1）$X(t)$和$Y(t)$都平稳吗？（2）$X(t)$与$Y(t)$是否联合平稳？

2—35 设随机信号$X(t)=a\cos(t+\Phi)$，其中a可以是、也可以不是随机变量，Φ是在$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量；并且a为随机变量时，它与Φ统计独立。求：（1）时间自相关函数和集自相关函数；（2）a具备什么条件时，两种自相关函数能相等。

2—36 设随机信号$X(t)=A\cos(\omega_0t+\Phi)$，式中$A$、$\Phi$为统计独立的随机变量，且$\Phi$在$(0,2\pi)$上均匀分布。试问该信号是否具有遍历性？证明之。

2—37 设随机过程 $X(t)=A\sin t+B\cos t$，其中 A、B 皆为零均值的随机变量。试证：$X(t)$ 是均值遍历的，而均方值无遍历性。

2—38 试讨论下述函数能否成为平稳随机过程的自相关函数

（1）常数；（2）$\cos\tau$；（3）$\sin\tau$；（4）$\dfrac{1}{1+2a|\tau|+\tau^2}$；

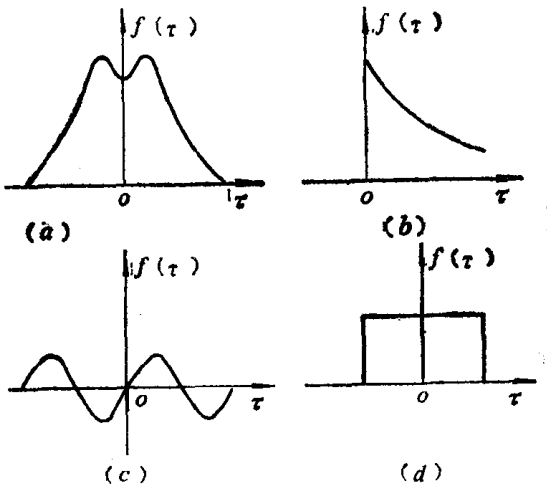
（5）$f(\tau)=\sigma^2 e^{-a|\tau|}\left(\mathrm{ch}\omega_0\tau+\dfrac{a}{\omega_0}\mathrm{sh}\omega_0|\tau|\right)$，$a>0$，$\omega_0>0$；

（6）$f(\tau)=\begin{cases}1, & |\tau|<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$；（7）$f(\tau)=\begin{cases}1-|\tau|, & |\tau|<1\\ 0, & |\tau|\geqslant 1\end{cases}$；

（8）$f(\tau)=\begin{cases}2, & \tau=0\\ e^{-|\tau|}, & \tau\neq 0\end{cases}$；（9）$f(\tau)=\begin{cases}e^{-b\tau}, & \tau>0\\ e^{b\tau}, & \tau<0\end{cases}$

b 为正的常数。

2—39 图题2—39所示的函数曲线中哪些不是正确的自相关函数曲线？为什么？



图题 2—39

2—40 设随机过程 $X(t)=A\cos(\Omega t+\Phi)$，式中 A、Ω 和 Φ 为统计独立的随机变量；而且，A 的均值为2、方差为4，Φ 在 $(-\pi,\pi)$ 上均匀分布，Ω 在 $(-5,5)$ 上均匀分布。试问过程 $X(t)$ 是否平稳？是否遍历？并求出 $X(t)$ 的自相关函数。

2—41 两个统计独立的平稳随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 有如下的自相关函

数

$$R_X(\tau) = 2e^{-2|\tau|}\cos\omega_0\tau$$
$$R_Y(\tau) = 9 + e^{-3|\tau^2|}$$

现设第三个随机过程 $Z(t) = AX(t)Y(t)$，其中A是均值为2、方差为9的随机变量。求过程$Z(t)$的均值、方差和自相关函数。

2—42 设$X(t)$是雷达的发射信号，遇目标后返回接收机的微弱信号是$aX(t-\tau_1)$，$a \ll 1$，τ_1是信号返回时间，由于接收到的信号总是伴有噪声的，记噪声为$N(t)$，故接收机收到的全信号为

$$Y(t) = aX(t-\tau_1) + N(t)$$

（1）若$X(t)$、$N(t)$单独平稳且联合平稳，求互相关函数$R_{XY}(t_1, t_2)$；

（2）在(1)的条件下，假如$N(t)$的均值为零，且与$X(t)$是相互独立的，求$R_{XY}(t_1, t_2)$（这是利用互相关函数从全信号中检测小信号的相关接收法）。

2—43 两个单独且联合平稳的随机过程为

$$X(t) = a\cos(\omega_0 t + \Theta)$$
$$Y(t) = b\sin(\omega_0 t + \Theta)$$

其中a、b、ω_0皆为常数，Θ是在$(0, 2\pi)$上均匀分布的随机变量。试求互相关函数$R_{XY}(\tau)$、$R_{YX}(\tau)$，并说明互相关函数在$\tau = 0$时的值具有什么意义。

2—44 对于两个零均值、各自且联合平稳的随机过程$X(t)$和$Y(t)$，已知：$\sigma_X^2 = 5$，$\sigma_Y^2 = 10$。说明下列每一个函数不可能应用到这两个过程的原因。

（1）$R_X(\tau) = 6U(\tau)e^{-3\tau}$；　（2）$R_X(\tau) = 5\sin 5\tau$；

（3）$R_{XY}(\tau) = 9(1 + 2\tau^2)^{-1}$；　（4）$R_Y(\tau) = -\cos(6\tau)e^{-|\tau|}$；

（5）$R_Y(\tau) = 5\left(\frac{\sin 3\tau}{3\tau}\right)$；　（6）$R_Y(\tau) = 6 + 4\left(\frac{\sin 10\tau}{10\tau}\right)$

2—45 假设平稳随机过程$X(t)$的导数存在，即有

$$\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}$$

试证：（1）$E[\dot{X}(t)] = 0$；（2）$\dot{X}(t)$的自相关函数$R_{\dot{X}}(\tau) = -d^2R_X(\tau)/d\tau^2$；（3）$X(t)$与$\dot{X}(t)$的互相关函数$R_{X\dot{X}}(\tau) = dR_X(\tau)/d\tau$。

2—46 已知平稳过程$X(t)$的自相关函数$R_X(\tau) = 2e^{-0.5\tau^2}$。求：(1)导数$\dot{X}(t)$的自相关函数和方差；(2)过程$X(t)$与其导数$\dot{X}(t)$的方差比。

2—47 已知平稳过程$X(t)$的自相关函数$R_X(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$（$\alpha > 0$）。求导数$\dot{X}(t)$的自相关函数；并证明$\dot{X}(t)$的方差与参数$D$及参

数α^2成比例。

2—48 在微分器输入端加一平稳随机信号$X(t)$，其自相关函数$R_X(\tau)=e^{-2|\tau|}(ch\tau+2sh|\tau|)$。求：（1）在输出端的自相关函数；（2）它的最大值。

2—49 已知正态平稳过程$X(t)$的均值$m_X=8$、自相关函数$R_X(\tau)=5e^{-|\tau|}(\cos 2\tau+0.5\sin 2|\tau|)$。求导数$Y(t)=\dot{X}(t)$落在区间（0,10）内的概率。

2—50 设$X_1(t)$、$X_2(t)$、$Y_1(t)$、$Y_2(t)$皆为实随机过程，并定义两个复随机过程为

$$Z_1(t)=X_1(t)+jY_1(t)$$

$$Z_2(t)=X_2(t)-jY_2(t)$$

在下述三条件下，分别求复过程$Z_1(t)$和$Z_2(t)$的互相关函数的表达式。

（1）所有实过程皆为相关的；

（2）它们皆为不相关的；

（3）它们都不相关，且皆有零均值。

2—51 设$Z(t)$为具有自相关函数$R_Z(\tau)$的平稳复随机过程。现定义随机变量

$$V=\int_a^{a+T}Z(t)\,dt$$

其中$T>0$和a皆为实数。证明

$$E[|V|^2]=\int_{-T}^{T}(T-|\tau|)R_Z(\tau)\,d\tau$$

2—52 设复随机过程为

$$Z(t)=Ve^{j\omega_0 t}$$

其中ω_0为正常数，V为实随机变量。求复过程$Z(t)$的自相关函数。

2—53 设复随机过程

$$Z(t)=e^{j(\omega_0 t+\Phi)}$$

其中ω_0为正常数，Φ是在$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量。试求$E[Z^*(t)Z(t+\tau)]$和$E[Z(t)Z(t+\tau)]$。

2—54 设复随机过程

$$Z(t)=\sum_{i=1}^{n}A_i e^{j\omega_i t}$$

式中$A_i(i=1,2,\cdots,n)$为n个实随机变量，$\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$为n个实数。求证：A_i与A_l间应满足什么条件，方能使$Z(t)$为复平稳过程。

2—55 设$X(n)(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为标准不相关序列，即

$$E[X(n)]=0$$

$$E[X^*(n)X(n+m)]=\begin{cases}0, & m\neq 0\\ 1, & m=0\end{cases}$$

试证$Y(n)=A_0X(n)+A_1X(n-1)+\cdots+A_sX(n-s)$也是平稳序列（其中$A_0,A_1,\cdots,A_s$是复数序列）。

2—56 令$X(n)$和$Y(n)$为不相关的随机信号，试证：如果

$$Z(n)=X(n)+Y(n)$$

则

$$m_Z=m_X+m_Y \quad 及 \quad \sigma_Z^2=\sigma_X^2+\sigma_Y^2$$

2—57 随机过程$X(t)$的采样序列$X(n)$的形式为

$$X(n)=\cos(\omega_0 n+\Theta)$$

式中Θ是在$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量，ω_0为常数。试问此随机序列是否广义平稳？并证明之。

2—58 有两个单独且联合平稳的随机序列$X(n)$和$Y(n)$，它们的均值分别为m_X和m_Y，方差分别为σ_X^2和σ_Y^2，试证明

$$|R_{XY}(m)|\leqslant[R_X(0)R_Y(0)]^{1/2},\quad |K_{XY}(m)|\leqslant[K_X(0)K_Y(0)]^{1/2};$$

$$|R_X(m)|\leqslant R_X(0),\quad |K_X(m)|\leqslant K_X(0)$$

$$\left[\text{提示：可利用不等式}\ E\left[\left(\frac{X_n}{(E[X_n^2])^{1/2}}\pm\frac{Y_{n+m}}{(E[Y_{n+m}^2])^{1/2}}\right)^2\right]\geqslant 0。\right]$$

2—59 设$X(t)$为零均值的平稳正态过程。现又设新的随机过程$Y(t)=X^2(t)$。试证明

$$R_Y(\tau)=R_X^2(0)+2R_X^2(\tau)$$

2—60 若正态随机过程$X(t)$有自相关函数

（1） $R_X(\tau)=6e^{-|\tau|/2}$

（2） $R_X(\tau)=6\dfrac{\sin\pi\tau}{\pi\tau}$

试确定随机变量$X(t)$、$X(t+1)$、$X(t+2)$、$X(t+3)$的协方差矩阵。

第三章　平稳随机过程的谱分析

Ⅰ．本章要点

首先，在教材中本章介绍了平稳随机过程的功率谱密度的概念、性质，以及功率谱密度与自相关函数之间的关系。接着，介绍了平稳离散时间随机过程的功率谱密度的定义及其与自相关函数的关系；并阐述了如何将香农采样定理推广应用于平稳随机过程，建立起连续时间随机过程与离散时间随机过程之间的相互变换关系；还论及了两个联合平稳随机过程的互谱密度的定义、性质及其与互相关函数的关系。最后，扼要地介绍了白噪声(过程)的定义及性质。

本章的重点及其要求：(1)平稳过程的自相关函数与功率谱密度之间、联合平稳过程的互相关函数与互谱密度之间皆互为傅里叶变换，知其一可求其二，并能求出平均功率、互功率。(2)对功率谱密度、互谱密度的定义及性质要熟记，以便灵活运用，解决有关问题。

Ⅱ．基本内容与例解

一、随机过程的谱分析

(一) 随机过程的功率谱密度

随机过程$X(t)$的样本函数$x(t)$不满足傅氏变换的绝对可积条件。尽管$x(t)$的总能量是无限的，但其平均功率却是有限值，即

$$Q_t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\mathrm{d}t<\infty \qquad (3.1)$$

过程的样本函数$x(t)$的截取函数定义为

$$x_T(t)=\begin{cases}x(t), & |t|\leqslant T<\infty\\ 0 & |t|>T\end{cases} \tag{3.2}$$

当T为有限值时，$x_T(t)$ 满足绝对可积条件，其傅氏变换存在，则有

$$X_x(T,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_T(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-T}^{T}x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt \tag{3.3}$$

$$x_T(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_x(T,\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \tag{3.4}$$

显然，$x_T(t)$也应满足帕塞瓦定理，即

$$\int_{-T}^{T}x^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X_x(T,\omega)|^2d\omega \tag{3.5}$$

对式（3.5）作集平均、时间平均处理后，可得到随机过程的平均功率为

$$\begin{aligned}Q&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X^2(t)]dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{E[|X_x(T,\omega)|^2]}{2T}d\omega\end{aligned} \tag{3.6}$$

由此式得到两个重要结论：

1. $$Q=A\langle E[X^2(t)]\rangle \tag{3.7}$$

若过程$X(t)$是平稳的，则有

$$Q=E[X^2(t)] \tag{3.8}$$

2. $$\text{设}\ Q=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)d\omega \tag{3.9}$$

则有

$$S_X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{E[|X_x(T,\omega)|^2]}{2T} \tag{3.10}$$

我们称$S_X(\omega)$为随机过程$X(t)$的功率谱密度（函数）。对平稳过程$X(t)$，则有

$$E[X^2(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\mathrm{d}\omega \qquad (3.11)$$

（二）功率谱密度与复频率面

为了系统分析的方便，有时用复频率$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$来代替实频率变量$\omega$，于是，功率谱密度便是复变量$s$的函数，记为$S_X(s)$。最简单的情况是，$\sigma=0$，此时记$s=\mathrm{j}\omega$；当用$-\mathrm{j}s$代替$\omega$时，功率谱密度应记为$S_X(-\mathrm{j}s)$或$S_X(s)$。

有时，也用复频率面上的零、极点图来研究功率谱密度。

（三）例解

〔例3.1〕 设随机过程

$$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Phi)$$

其中a和ω_0皆是实常数，Φ是均匀分布在区间$(0,\pi/2)$上的随机变量。试求过程$X(t)$的平均功率。

解：因为过程$X(t)$的均方值

$$E[X^2(t)]=E[a^2\cos^2(\omega_0 t+\Phi)]=E\left[\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\cos(2\omega_0 t+2\Phi)\right]$$

$$=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\cos(2\omega_0 t+2\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{\pi}\sin 2\omega_0 t$$

是时间t的函数，故$X(t)$不是宽平稳的。根据式（3.7），我们可求得过程$X(t)$的平均功率

$$Q=A\langle E[X^2(t)]\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{\pi}\sin 2\omega_0 t\right)\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}$$

〔例3.2〕 设平稳随机过程$X(t)$的功率谱密度为

$$S_X(\omega)=\frac{25(\omega^2+16)}{\omega^4+34\omega^2+225}$$

求用复频率$s=\mathrm{j}\omega$表示的$S_X(s)$，并在复频率面上画出$S_X(s)$的零、极点图。

解：用$-\mathrm{j}s$来代替ω，即用$-s^2$代替ω^2，将$S_X(\omega)$变换到复频率面，便得到

$$S_X(\omega)=S_X(-\mathrm{j}s)=S_X(s)=\frac{25(-s^2+16)}{s^4-34s^2+225}$$

将上式因式分解，可得

$$S_X(s)=\frac{-25(s+4)(s-4)}{(s+3)(s-3)(s+5)(s-5)}$$

$S_X(s)$的零、极点图如图3.1所示。

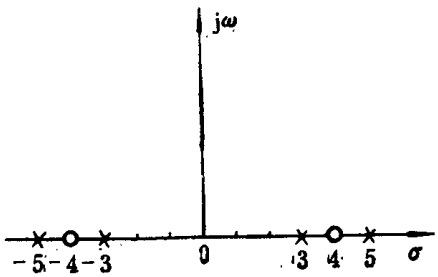


图 3.1

二、平稳随机过程功率谱密度的性质

（一）平稳过程$X(t)$的功率谱密度的性质

1. $S_X(\omega)\geqslant 0$ (3.12)

2. 功率谱密度$S_X(\omega)$是ω的实函数。

3. $S_X(\omega)=S_X(-\omega)$ (3.13)

4. $S_X(\omega)$可积。

5. $S_{\dot{X}}(\omega)=\omega^2 S_X(\omega)$ (3.14)

6. 在平稳过程中，有一大类过程，其功率谱密度是ω的有理函数，即

$$S_X(\omega)=\frac{S_0(\omega^{2M}+c_{2M-2}\omega^{2M-2}+\cdots+c_2\omega^2+c_0)}{\omega^{2N}+d_{2N-2}\omega^{2N-2}+\cdots+d_2\omega^2+d_0} \tag{3.15}$$

式中$S_0>0$，$M<N$；此外，分母应该无实数根。

（二）例解

〔**例3.3**〕 设可微平稳随机过程$X(t)$的功率谱密度为$S_X(\omega)$，试证该过程的导数$\dot{X}(t)$的功率谱密度为

$$S_{\dot{X}}(\omega)=\omega^2 S_X(\omega)$$

证：由习题2—45得知：$E[\dot{X}(t)]=0$，$R_{\dot{X}}(\tau)=-\mathrm{d}^2R_X(\tau)/\mathrm{d}\tau^2$。即：平稳随机过程$X(t)$的导数$\dot{X}(t)$也是平稳的。因为平稳过程的功率谱密度与相关函数是一对傅里叶变换，故有

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega \qquad (1)$$

$$R_{\dot{X}}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{\dot{X}}(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega \qquad (2)$$

而导数过程$\dot{X}(t)$的相关函数又可写成

$$R_{\dot{X}}(\tau)=-\frac{\mathrm{d}^2R_X(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2}=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega\right]$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{j}\omega)^2S_X(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2S_X(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega \qquad (3)$$

比较(2)、(3)两式，容易得到

$$S_{\dot{X}}(\omega)=\omega^2S_X(\omega)$$

从而，得证。

三、平稳随机过程的功率谱密度与自相关函数之间的关系

（一）关系式

经分析，随机过程自相关函数的时间均值与过程功率谱密度之间构成了傅里叶变换对，即

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}A\langle R_X(t,t+\tau)\rangle\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \qquad (3.16)$$

$$A\langle R_X(t,t+\tau)\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega \qquad (3.17)$$

若平稳过程$X(t)$满足

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}|R_X(\tau)|\mathrm{d}\tau<\infty\\ \int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\mathrm{d}\omega<\infty\end{cases}\tag{3.18}$$

则有

$$\begin{cases}S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\\ R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega\end{cases}\tag{3.19}$$

此关系式就是著名的维纳-辛钦定理。利用$R_X(\tau)$、$S_X(\omega)$的偶函数特性，式（3.19）还可表示为

$$\begin{cases}S_X(\omega)=2\int_0^{\infty}R_X(\tau)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\\ R_X(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}S_X(\omega)\cos\omega\tau\mathrm{d}\omega\end{cases}\tag{3.20}$$

（二）例解

〔例3.4〕 设平稳过程$X(t)$的自相关函数为

$$R_X(\tau)=\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

其中a、ω_0均为常数。求该过程的功率谱密度。

解：由式（3.19），可得

$$\begin{aligned}S_X(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&=\frac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\tau}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0\tau})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&=\frac{a^2}{4}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)\tau}\,\mathrm{d}\tau+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+\omega_0)\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\\&=\frac{\pi a^2}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]\end{aligned}$$

〔例3.5〕 设随机过程$Y(t)=aX(t)\sin\omega_0 t$，其中a、ω_0皆为常数，$X(t)$为具有功率谱密度$S_X(\omega)$的平稳过程。求过程$Y(t)$的功率谱密度。

解：首先，我们可求得过程$Y(t)$的自相关函数

$$\begin{aligned}R_Y(t,t+\tau)&=E[Y(t)Y(t+\tau)]\\&=E[aX(t)\sin\omega_0 t\cdot aX(t+\tau)\sin\omega_0(t+\tau)]\\&=\frac{a^2}{2}R_X(\tau)[\cos\omega_0\tau-\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau)]\end{aligned}$$

显然，$Y(t)$为非平稳过程，故由式（3.16）可得

$$S_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}A\langle R_Y(t,t+\tau)\rangle e^{-j\omega t}\,d\tau$$

而

$$A\langle R_Y(t,t+\tau)\rangle=\frac{a^2}{2}R_X(\tau)\cos\omega_0\tau$$

因此，最后得到过程$Y(t)$的功率谱密度为

$$S_Y(\omega)=\frac{a^2}{4}[S_X(\omega-\omega_0)+S_X(\omega+\omega_0)]$$

〔例3.6〕 平稳过程$X(t)$的功率谱密度为

$$S_X(\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+3\omega^2+2}$$

求该过程的自相关函数$R_X(\tau)$和平均功率Q。

解：首先，由式（3.15），我们能断定题给式是功率谱密度的正确表达式。

（1）求$R_X(\tau)$

方法1：由$X(t)$的自相关函数表示式（3.19）可得

$$\begin{aligned}R_X(\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2+1}{\omega^4+3\omega^2+2}e^{j\omega\tau}\,d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2+1}{(\omega^2+1)(\omega^2+2)}e^{j\omega\tau}\,d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^2+2}e^{j\omega\tau}\,d\omega\end{aligned}$$

然后，利用留数定理，可求得

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi j\left\{\frac{e^{j|\tau|z}}{z^2+2}\text{在 } z=\sqrt{2}\ j \text{ 处的留数}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}$$

方法2：因为

$$S_X(\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+3\omega^2+2}=\frac{1}{\omega^2+2}=\frac{2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}}{\omega^2+(\sqrt{2})^2}$$

由参考文献[1]中表3.3之1，很容易得到

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}$$

（2）求平均功率Q

$$Q=E[X^2(t)]=R_X(0)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

四、离散时间随机过程的功率谱密度

（一）离散时间随机过程的功率谱密度

设$X(n)$为宽平稳离散时间随机过程，其自相关函数$R_X(m)$满足

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}|R_X(m)|<\infty \tag{3.21}$$

定义1 $X(n)$的功率谱密度$S_X(\omega)$为$R_X(m)$的离散傅里叶变换，即

$$S_X(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_X(m)\ e^{-jm\omega T} \tag{3.22}$$

它是周期连续函数，其周期为ω_q（即Nyquist频率），即

$$\omega_q=\frac{\pi}{T} \tag{3.23}$$

且有

$$R_X(m)=\frac{1}{2\omega_q}\int_{-\omega_q}^{\omega_q}S_X(\omega)\,e^{jm\omega T}\,d\omega \tag{3.24}$$

$$E[|X(n)|^2]=R_X(0)=\frac{1}{2\omega_q}\int_{-\omega_q}^{\omega_q}S_X(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{3.25}$$

定义2 $X(n)$的功率谱密度$S'_X(z)$为$R_X(m)$的Z变换

$$S'_X(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_X(m)z^{-m} \tag{3.26}$$

显然，有

$$S'_X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})=S_X(\omega) \tag{3.27}$$

$R_X(m)$则为$S'_X(z)$的逆Z变换，即

$$R_X(m)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_D S'_X(z)z^{m-1}\mathrm{d}z \tag{3.28}$$

式中D为收敛区中的简单闭合围线。

（二）平稳过程的采样定理

若零均值的限带平稳过程$X(t)$的功率谱密度为

$$S_X(\omega)=\begin{cases}S_X(\omega), & |\omega|\leqslant\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases} \tag{3.29}$$

在采样周期$T\leqslant\frac{1}{2f_c}$时，可将$X(t)$按其振幅样本展开为

$$X(t)=\mathrm{l.i.m}_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}X(nT)\frac{\sin(\omega_c t-n\pi)}{\omega_c t-n\pi} \tag{3.30}$$

此式就是平稳过程的采样定理。

（三）功率谱密度的采样定理

若平稳连续时间实随机过程$X(t)$，其自相关函数和功率谱密度分别以$R_c(\tau)$和$S_c(\omega)$记；对$X(t)$采样后，所得离散时间随机过程$X(n)=X(nT)$，$X(n)$的自相关函数和功率谱密度分别用$R(m)$和$S(\omega)$表示，则有

$$R(m)=R_c(mT) \tag{3.31}$$

$$S(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}S_c(\omega+2n\omega_q),\quad \omega_q=\frac{\pi}{T} \tag{3.32}$$

式（3.32）就是功率谱密度的采样定理。

（四）例解

〔例3.7〕 设平稳离散时间随机过程$X(n)$的自相关函数为

$$R_X(m)=\mathrm{e}^{-|m|}$$

求$X(n)$的功率谱密度$S'_x(z)$和$S_x(\omega)$。

解：由式（3.26）可得

$$\begin{aligned}S'_x(z)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_X(m)z^{-m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-|m|}z^{-m}\\&=\sum_{m=-\infty}^{-1}\mathrm{e}^{m}z^{-m}+\sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-m}z^{-m}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n}z^{n}+\sum_{m=0}^{\infty}(\mathrm{e}z)^{-m}\end{aligned}\qquad(1)$$

上式等号右端第一个和式在$\frac{|z|}{\mathrm{e}}<1$（或$|z|<\mathrm{e}$）处收敛为$\frac{z/\mathrm{e}}{1-z/\mathrm{e}}$，第二个和式在$\mathrm{e}|z|>1$(或$|z|>\frac{1}{\mathrm{e}}$)处收敛为$\frac{1}{1-(\mathrm{e}z)^{-1}}$，故我们得到

$$\begin{aligned}S'_x(z)&=\frac{z/\mathrm{e}}{1-z/\mathrm{e}}+\frac{1}{1-(\mathrm{e}z)^{-1}}=\frac{z}{\mathrm{e}-z}+\frac{\mathrm{e}z}{\mathrm{e}z-1}\\&=\frac{z(\mathrm{e}z-1)+\mathrm{e}z(\mathrm{e}-z)}{(\mathrm{e}-z)(\mathrm{e}z-1)}=\frac{(\mathrm{e}^2-1)z}{(\mathrm{e}-z)(\mathrm{e}z-1)},\quad\frac{1}{\mathrm{e}}<z<\mathrm{e}\end{aligned}\qquad(2)$$

由式（3.27）及（2）式，容易得到

$$\begin{aligned}S_x(\omega)=S'_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})&=\frac{(\mathrm{e}^2-1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}}{(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})(\mathrm{e}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}-1)}\\&=\frac{\mathrm{e}^2-1}{(\mathrm{e}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}-1)(\mathrm{e}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}-1)}=\frac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}-\mathrm{e}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}+1}\end{aligned}$$

$$=\frac{e^{2}-1}{e^{2}-2e\cos\omega T+1} \qquad (3)$$

若$T=1$时，则(3)式变为

$$S_X(\omega)=S'_X(e^{j\omega})=\frac{e^{2}-1}{e^{2}-2e\cos\omega+1}$$

五、互谱密度

(一) 互谱密度

设$X(t)$、$Y(t)$为联合平稳随机过程，若$X_x(T,\omega)$、$X_y(T,\omega)$分别为$x_T(t)$、$y_T(t)$的傅里叶变换，则可定义这两个过程的互谱密度为

$$S_{XY}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[X_X^*(T,\omega)X_Y(T,\omega)] \qquad (3.33)$$

$$S_{YX}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[X_Y^*(T,\omega)X_X(T,\omega)] \qquad (3.34)$$

于是，两个过程$X(t)$和$Y(t)$的互功率为

$$Q_{XY}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{XY}(\omega)d\omega \qquad (3.35)$$

$$Q_{YX}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{YX}(\omega)d\omega=Q_{XY} \qquad (3.36)$$

(二) 互谱密度与互相关函数的关系

对于两个实随机过程$X(t)$、$Y(t)$，有

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}A\langle R_{XY}(t,t+\tau)\rangle e^{-j\omega\tau}\,d\tau \qquad (3.37)$$

$$A\langle R_{XY}(t,t+\tau)\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{XY}(\omega)\,e^{j\omega\tau}\,d\omega \qquad (3.38)$$

若实过程$X(t)$、$Y(t)$联合平稳，则有

$$S_{XY}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{XY}(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau \qquad (3.39)$$

$$R_{XY}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{XY}(\omega)\,e^{j\omega\tau}\,d\omega \qquad (3.40)$$

（三）互谱密度的性质

1．$S_{XY}(\omega)=S_{YX}(-\omega)=S_{YX}^{*}(\omega)$ (3.41)

2．互谱密度的实部Re〔$S_{XY}(\omega)$〕、Re〔$S_{YX}(\omega)$〕为ω的偶函数，其虚部Im〔$S_{XY}(\omega)$〕、Im〔$S_{YX}(\omega)$〕为ω的奇函数。

3．若随机过程$X(t)$与$Y(t)$正交，则

$$S_{XY}(\omega)=S_{YX}(\omega)=0 \qquad (3.42)$$

4．若$X(t)$和$Y(t)$是两个不相关的、均值分别为m_X和m_Y的平稳过程，则

$$S_{XY}(\omega)=S_{YX}(\omega)=2\pi m_X m_Y\delta(\omega) \qquad (3.43)$$

5．$|S_{XY}(\omega)|^2\leqslant S_X(\omega)S_Y(\omega)$ (3.44)

（四）例解

〔**例3.8**〕 已知随机过程$Z(t)$为

$$Z(t)=aX(t)+bY(t)$$

其中a和b皆为实常数，$X(t)$和$Y(t)$是各自平稳且联合平稳的随机过程。试求：

（1）过程$Z(t)$的功率谱密度$S_Z(\omega)$；

（2）过程$X(t)$与$Y(t)$不相关时的$S_Z(\omega)$；

（3）互谱密度$S_{XZ}(\omega)$和$S_{YZ}(\omega)$。

解：（1）因为$X(t)$、$Y(t)$各自且联合平稳，而过程$Z(t)$的均值、相关函数分别为

$$\begin{aligned}m_Z(t)&=E〔Z(t)〕=E〔aX(t)+bY(t)〕\\&=am_X+bm_Y=m_Z\ (\text{常数})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_Z(t,t+\tau)&=E〔Z(t)Z(t+\tau)〕\\&=E〔(aX(t)+bY(t))(aX(t+\tau)+bY(t+\tau))〕\\&=a^2R_X(\tau)+b^2R_Y(\tau)+abR_{XY}(\tau)+abR_{YX}(\tau)\\&=R_Z(\tau)\end{aligned}$$

故$Z(t)$也是（宽）平稳过程，它的功率谱密度为

$$S_Z(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_Z(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

$$=a^2S_X(\omega)+b^2S_Y(\omega)+abS_{XY}(\omega)+abS_{YX}(\omega)$$

（2）由式（3.43）可知，平稳过程$X(t)$与$Y(t)$不相关时的互谱密度为

$$S_{XY}(\omega)=S_{YX}(\omega)=2\pi m_X m_Y\delta(\omega)$$

因此，$Z(t)$的功率谱密度为

$$S_Z(\omega)=a^2S_X(\omega)+b^2S_Y(\omega)+4\pi abm_Xm_Y\delta(\omega)$$

（3）由定义及题给条件，可求得互相关函数

$$R_{XZ}(t,t+\tau)=E[X(t)Z(t+\tau)]$$

$$=E[X(t)(aX(t+\tau)+bY(t+\tau))]$$

$$=aR_X(\tau)+bR_{XY}(\tau)=R_{XZ}(\tau)$$

$$R_{YZ}(t,t+\tau)=E[Y(t)Z(t+\tau)]$$

$$=E[Y(t)(aX(t+\tau)+bY(t+\tau))]$$

$$=aR_{YX}(\tau)+bR_Y(\tau)R_{YZ}(\tau)$$

所以，对$R_{XZ}(\tau)$、$R_{YZ}(\tau)$进行傅里叶变换，便得到互谱密度为

$$S_{XZ}(\omega)=aS_X(\omega)+bS_{XY}(\omega)$$

$$S_{YZ}(\omega)=aS_{YX}(\omega)+bS_Y(\omega)$$

〔**例3.9**〕 设可微平稳过程$X(t)$的功率谱密度为$S_X(\omega)$。证明：过程$X(t)$及其导数$\dot{X}(t)$的互谱密度为

$$S_{X\dot{X}}(\omega)=j\omega S_X(\omega)$$

证：因为联合平稳过程的互谱密度与互相关函数是一对傅里叶变换，故有

$$R_{X\dot{X}}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{X\dot{X}}(\omega)\,e^{j\omega\tau}\,d\omega \qquad (1)$$

另由习题2—45可知：$R_{X\dot{X}}(\tau)=dR_X(\tau)/d\tau$。且因

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\,e^{j\omega\tau}\,d\omega \qquad (2)$$

则得到

$$R_{X\dot{X}}(\tau)=\frac{\mathrm{d}R_X(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{j}\omega)S_X(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega \qquad (3)$$

比较(1)、(3)二式，可得

$$S_{X\dot{X}}(\omega)=\mathrm{j}\omega S_X(\omega)$$

于是，得证。此式可以作为性质来运用。

六、白噪声

若零均值的平稳过程$N(t)$，其功率谱密度$S_N(\omega)$在整个频率轴上为非零常数，即

$$S_N(\omega)=\frac{1}{2}N_0 \qquad -\infty<\omega<\infty，N_0为正实常数 \qquad (3.45)$$

则称$N(t)$为白噪声（过程）。

白噪声$N(t)$的自相关函数、相关系数分别为

$$R_N(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau) \qquad (3.46)$$

$$r_N(\tau)=\frac{K_N(\tau)}{K_N(0)}=\frac{R_N(\tau)}{R_N(0)}=\begin{cases}1, & \tau=0\\ 0, & \tau\neq 0\end{cases} \qquad (3.47)$$

Ⅲ. 习　　题

3—1　已知随机过程$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Theta)$，其中$a$和$\omega_0$皆为常数，$\Theta$是在$(0,\pi)$上均匀分布的随机变量。

（1）过程$X(t)$是宽平稳的吗？证明之。

（2）利用式$Q=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X^2(t)]\mathrm{d}t$，求$X(t)$的功率。

（3）利用式$S_X(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{E[|X_X(T,\omega)|^2]}{2T}$，求$X(t)$的功率谱密度；并由式

$$Q=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

计算$X(t)$的功率。你先后求得的$X(t)$的功率值相等吗?

3—2 如果过程$X(t)$定义为$X(t)=U(t)a\cos(\omega_0 t+\Theta)$，式中$a$、$\omega_0$皆为常数，$\Theta$是在$(0,\pi)$上均匀分布的随机变量，$U(t)$为单位阶跃函数。重新求解上题。

3—3 平稳过程$X(t)$的双边功率谱密度为$S_X(\omega)=32/(\omega^2+16)$。求：(1)该过程的平均功率（在1Ω负载上）；(2)ω取值范围为$(-4,4)$的平均功率。

3—4 设平稳过程$X(t)$的功率谱密度为

$$S_X(\omega)=\begin{cases}1-\dfrac{|\omega|}{8\pi}, & |\omega|\leqslant 8\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求该过程的均方值。

3—5 设平稳过程$X(t)$的功率谱密度为

$$S_X(\omega)=\frac{16(\omega^2+36)}{\omega^4+13\omega^2+36}$$

(1)把该功率谱密度写成复频率s的函数；(2)列出$S_X(s)$的所有零、极点频率。

3—6 设平稳过程$X(t)$的功率谱密度为

$$S_X(s)=\frac{-s^2+16}{s^4-52s^2+576}$$

(1)写出作为ω的函数的功率谱密度；(2)求过程$X(t)$的均方值。

3—7 已知平稳过程$X(t)$的功率谱密度为

$$S_X(\omega)=\frac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2}$$

求过程$X(t)$的均方值。

3—8 在下列函数中，试确定哪些函数是功率谱密度，哪些不是，并说明原因。

(1) $\dfrac{\omega^2}{\omega^6+3\omega^2+3}$；(2) $\mathrm{e}^{-(\omega-1)^2}$；(3) $\dfrac{\omega^2}{\omega^4+1}-\delta(\omega)$；

(4) $\dfrac{\omega^4}{1+\omega^2+\mathrm{j}\omega^6}$；(5) $\dfrac{\cos 3\omega}{1+\omega^2}$；(6) $\dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}$；

(7) $\dfrac{|\omega|}{1+2\omega+\omega^2}$；(8) $\dfrac{1}{\sqrt{1-3\omega^2}}$

3—9　下列有理函数是否是功率谱密度的正确表达式？为什么？

$$S_1(\omega)=\frac{\omega^2+9}{(\omega^2+4)(\omega+1)^2};\quad S_2(\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6};$$

$$S_3(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4-4\omega^2+3};\qquad S_4(\omega)=\frac{e^{-j\omega^2}}{\omega^2+2}$$

并且，对正确的功率谱密度表达式，求自相关函数和均方值。

3—10　设A和B为随机变量，我们构成随机过程$X(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$，式中$\omega_0$为一实常数。（1）证明：若$A$和$B$具有零均值及相同的方差$\sigma^2$，且不相关，则$X(t)$为（宽）平稳过程；（2）求$X(t)$的自相关函数；（3）求该过程的功率谱密度。

3—11　设$X(t)$是一个具有非零均值（$m_X\neq 0$）的平稳随机过程。证明

$$S_X(\omega)=2\pi m_X^2\delta(\omega)+\int_{-\infty}^{\infty}K_X(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

3—12　设平稳过程$X(t)$有功率谱密度

$$S_X(\omega)=\begin{cases}C, & |\omega|\leqslant\omega_c\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中$\omega_c>0$，$C>0$。试证$X(t)$的自相关函数满足条件

$$\lim_{\omega_c\to\infty}\frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}=\begin{cases}0, & \tau\neq 0\\ 1, & \tau=0\end{cases}$$

3—13　假定平稳过程$X(t)$在频率$f=0$时的功率谱密度为零。证明该过程的自相关函数满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)d\tau=0$$

3—14　已知平稳过程$X(t)$的自相关函数如下

（1）　$R_X(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$；

（2）　$R_X(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau$；

（3）　$R_X(\tau)=be^{-\frac{\tau^2}{2a^2}}$；

（4）　$R_X(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{|\tau|}{T}, & -T<\tau<T\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

式中α、ω_0、b、a、T皆为正的常数。求它们的功率谱密度，并作图。

3—15　已知平稳过程$X(t)$的自相关函数为$R_X(\tau)=a\cos^4\omega_0\tau$，其中$a$和$\omega_0$皆为正常数。求$X(t)$的功率谱密度及其功率。

3—16 已知平稳过程$X(t)$的自相关函数如下

（1）$R_X(\tau)=4e^{-|\tau|}\cos\pi\tau+\cos3\pi\tau$；

（2）$R_X(\tau)=16e^{-2|\tau|}-8e^{-4|\tau|}$

分别求过程$X(t)$的功率谱密度。

3—17 已知平稳过程$X(t)$的功率谱密度如下

（1）$S_X(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant\omega_0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

（2）$S_X(\omega)=\begin{cases}8\delta(\omega)+20\left(1-\dfrac{|\omega|}{10}\right), & |\omega|\leqslant10\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

其中ω_0为正的常数。分别求过程$X(t)$的自相关函数。

3—18 设随相余弦信号$X(t)=\cos(\omega_0t+\Phi)$，其中$\omega_0$为常数，$\Phi$是在$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量。求随机信号$X(t)$的功率谱密度。

3—19 设随机过程$Y(t)=X(t)\cos(\omega_0t+\Phi)$，式中$X(t)$为平稳过程，且与$\cos(\omega_0t+\Phi)$统计独立；$\omega_0$为常数；$\Phi$是在$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量。求过程$Y(t)$的自相关函数及功率谱密度。

3—20 设随机过程

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_iX_i(t)$$

式中α_i是一组实常数，而随机过程$X_i(t)$皆为平稳的和正交的。证明

$$S_X(\omega)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2S_{X_i}(\omega)$$

3—21 设随机过程$X(t)=a\cos(\Omega t+\Phi)$，式中$a$是实常数；$\Omega$、$\Phi$是两个互不相关的随机变量，$\Omega$具有概率密度$f_\Omega(\omega)=f_\Omega(-\omega)$，$\Phi$在$(0,2\pi)$上均匀分布。试证$X(t)$的功率谱密度为

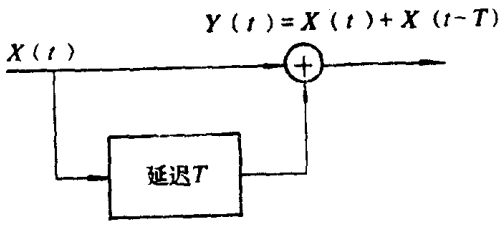
$$S_X(\omega)=\frac{\pi a^2}{2}[f_\Omega(\omega)+f_\Omega(-\omega)]=\pi a^2f_\Omega(\omega)$$

3—22 若系统的输入$X(t)$为平稳随机过程，系统的输出为$Y(t)=X(t)+X(t-T)$（参看图题3—22）。试证过程$Y(t)$的功率谱密度为

$$S_Y(\omega)=2S_X(\omega)(1+\cos\omega T)$$

3—23 设随机过程$W(t)=X(t)\cos\omega_0t+Y(t)\sin\omega_0t$，式中$X(t)$和$Y(t)$是联合（宽）平稳的随机过程，$\omega_0$为正的常数。

（1）讨论$X(t)$和$Y(t)$及其均值和相关函数在什么条件下，才能使



图题 3—22

$W(t)$是(宽)平稳的；

（2）利用（1）所得的条件，根据 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的功率谱密度，求 $W(t)$的功率谱密度；

（3）若$X(t)$与$Y(t)$互不相关，则$W(t)$的功率谱密度是什么？

3—24 设$X(t)$和$Y(t)$是两个互不相关的平稳过程，它们的均值 m_X和 m_Y皆不为零。现定义随机过程$Z(t)=X(t)+Y(t)$，求互谱密度$S_{XY}(\omega)$ 和 $S_{XZ}(\omega)$。

3—25 定义两个随机过程为 $X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Phi)$，$Y(t)=V(t)\times\cos(\omega_0 t+\Phi)$，式中$a$和$\omega_0$皆为实正常数，$\Phi$为与$V(t)$无关的随机变量，$V(t)$为具有恒定的均值$m_V$的随机过程。运用定义式

$$S_{XY}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E[X_T^*(T,\omega)X_Y(T,\omega)]$$

证明：无论Φ的概率密度的形式如何，总有

$$S_{XY}(\omega)=\frac{\pi a m_V}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

3—26 继续考虑3—25题的两个随机过程，

（1）证明$X(t)$与$Y(t)$的互相关函数为

$$R_{XY}(t,t+\tau)=\frac{am_V}{2}\{\cos\omega_0\tau+E[\cos 2\Phi]\cos(2\omega_0 t+\omega_0\tau)$$
$$-E[\sin 2\Phi]\sin(2\omega_0 t+\omega_0\tau)\}$$

（2）求$R_{XY}(t,t+\tau)$ 的时间平均，并确定互功率谱密度$S_{XY}(\omega)$。

3—27 设随机过程$X(t)$和$Y(t)$平稳相依，证明

$$\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)]=\mathrm{Re}[S_{YX}(\omega)]$$
$$\mathrm{Im}[S_{XY}(\omega)]=-\mathrm{Im}[S_{YX}(\omega)]$$

3—28 设$X(t)$是复平稳过程，试证：（1）$X(t)$的自相关函数$R_X^*(-\tau)=R_X(\tau)$；（2）$X(t)$的功率谱密度为实函数。

3—29 设两个复随机过程$X(t)$和$Y(t)$各自平稳且联合平稳，证明

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}^{*}(-\tau)$$

$$S_{XY}^{*}(\omega) = S_{YX}(\omega)$$

3—30 设$X(t)$和$Y(t)$是两个统计独立的平稳过程，它们的均值至少有一个为零，功率谱密度分别为

$$S_X(\omega) = \frac{16}{\omega^2 + 16}, \quad S_Y(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + 16}$$

现设新随机过程$Z(t) = X(t) + Y(t)$，求：（1）$Z(t)$的功率谱密度；（2）$X(t)$和$Y(t)$的互谱密度$S_{XY}(\omega)$；（3）$X(t)$和$Z(t)$的互谱密度$S_{YZ}(\omega)$。

3—31 对于题3—30的这两个过程，现设新随机过程$V(t) = X(t) - Y(t)$，求$Z(t)$和$V(t)$的互谱密度$S_{ZV}(\omega)$。

3—32 已知可微平稳过程$X(t)$的功率谱密度为

$$S_X(\omega) = \frac{4D\alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$$

式中D、α皆为实正常数。求过程$X(t)$与其导数$\dot{X}(t)$的互谱密度$S_{X\dot{X}}(\omega)$。

3—33 已知可微平稳过程$X(t)$的自相关函数为$R_X(\tau) = 2e^{-\tau^2}$求过程$X(t)$与其导数$\dot{X}(t)$的互谱密度$S_{X\dot{X}}(\omega)$。

第四章　随机信号通过线性系统的分析

Ⅰ．本章要点

随机信号通过线性系统的分析，是统计信号处理的基础。在教材中，本章介绍了计算线性系统（连续系统和离散系统）输出二阶统计特性的两种基本方法——时域中的卷积法和频域分析法；讨论了线性系统输出端概率密度的计算问题；定义了系统的等效噪声带宽、白化滤波器、自回归滑动平均、自回归及滑动平均随机信号等概念。

本章的重点及其要求：

（1）掌握以下五条性质：a、双侧宽或严平稳随机信号通过线性系统后的输出仍是宽或严平稳的，且输入与输出联合宽平稳；b、双侧宽遍历随机信号通过线性系统后的输出仍是宽遍历的；c、高斯随机信号通过线性系统后的输出仍是高斯随机信号；d、若线性系统的输入随机信号的带宽远大于系统的带宽，则无论输入信号具有何种概率密度函数，系统输出的概率密度皆近似于高斯分布；e、线性系统输出的随机信号的相关时间与系统的带宽成反比。

（2）学会运用时域中的卷积法和频域分析方法，计算平稳随机信号激励下系统输出的二阶统计特性，计算高斯随机信号激励下系统输出端的概率密度。

（3）会计算系统的等效噪声带宽。

Ⅱ．基本内容与例解

一、线性系统输出-输入统计特性之间的关系

（一）双侧平稳随机信号激励下系统输出的统计特性

1．假设与系统输出表达式　对于图4.1所示的线性系统，设其具有稳定性和时不变性，并且它是物理可实现的。输入 $X(t)$ 或 $X(n)$ 是双侧随机信号（即在整个时间轴上存在，且在负无穷大时刻就开始作用于系统的随机信号），系统在这样的信号激励下，输出响应从零时刻开始已进入稳态，其零状态响应为

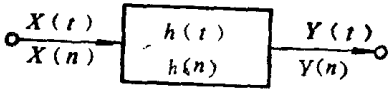


图 4.1　线性系统示意图

$$Y(t)=\int_0^{\infty} h(u)X(t-u)\mathrm{d}u=h(t)*X(t) \tag{4.1}$$

$$Y(n)=\sum_{k=0}^{\infty} h(k)X(n-k)=h(n)*X(n) \tag{4.2}$$

式中 $h(t)$ 和 $h(n)$ 分别是连续时间系统和离散时间系统的单位冲激响应。当输入随机信号有界时，式（4.1）和式（4.2）在均方意义下收敛。

2．时域分析法——卷积法　若输入双侧随机信号是宽或严平稳的，则输出也是宽或严平稳的，且输入与输出联合宽平稳。若输入是宽遍历的，则输出亦是宽遍历的。设输入随机信号的均值为 m_X、自相关函数为 $R_X(\tau)$ 或 $R_X(m)$，根据时域分析法——卷积法得系统输出的均值为

$$m_Y=m_X\int_0^{\infty} h(t)\mathrm{d}t \tag{4.3}$$

$$m_Y = m_X \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \tag{4.4}$$

系统输出与输入之间的互相关函数

$$R_{XY}(\tau) = \int_0^{\infty} h(u) R_X(\tau - u)\,\mathrm{d}u = R_X(\tau) * h(\tau) \tag{4.5}$$

$$R_{YX}(\tau) = \int_0^{\infty} h(u) R_X(\tau + u)\,\mathrm{d}u = R_X(\tau) * h(-\tau) \tag{4.6}$$

$$R_{XY}(m) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) R_X(m-k) = R_X(m) * h(m) \tag{4.7}$$

$$R_{YX}(m) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) R_X(m+k) = R_X(m) * h(-m) \tag{4.8}$$

系统输出的自相关函数

$$R_Y(\tau) = \int_0^{\infty}\int h(u)h(v)R_X(\tau+u-v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \tag{4.9}$$

$$R_Y(m) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} h(k)h(i)R_X(m+k-i)$$

$$= R_X(m) * h(m) * h(-m) \tag{4.10}$$

3．频域分析法　若输入随机信号的功率谱密度为 $S_X(\omega)$，连续时间系统的传递函数为 $H(\omega)$ 或 $H(s)$，离散时间系统的传递函数为 $H(\mathrm{e}^{j\omega})$ 或 $H(z)$，根据频域分析法，得系统输出的均值为

$$m_Y = m_X H(0) \tag{4.11}$$

$$m_Y = m_X H(\mathrm{e}^{j0}) = m_X H(z)\big|_{z=1} \tag{4.12}$$

系统输出与输入之间的互谱密度

$$S_{XY}(\omega) = H(\omega) S_X(\omega) \tag{4.13}$$

$$S_{YX}(\omega) = H(-\omega) S_X(\omega) \tag{4.14}$$

$$S_{XY}(s) = H(s) S_X(s) \tag{4.15}$$

$$S_{YX}(s)=H(-s)S_X(s) \tag{4.16}$$

$$S_{XY}(\omega)=H(e^{j\omega})S_X(\omega) \tag{4.17}$$

$$S_{YX}(\omega)=H(e^{-j\omega})S_X(\omega) \tag{4.18}$$

$$S'_{XY}(z)=H(z)S'_X(z) \tag{4.19}$$

$$S'_{YX}(z)=H(z^{-1})S'_X(z) \tag{4.20}$$

系统输出的功率谱密度为

$$S_Y(\omega)=H(\omega)H(-\omega)S_X(\omega)=|H(\omega)|^2S_X(\omega) \tag{4.21}$$

$$S_Y(s)=H(s)H(-s)S_X(s) \tag{4.22}$$

$$S_Y(\omega)=H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega})S_X(\omega)=|H(e^{j\omega})|^2S_X(\omega) \tag{4.23}$$

$$S_Y(z)=H(z)H(z^{-1})S'_X(z) \tag{4.24}$$

以上各式中$S_X(s)$、$S_{XY}(s)$、$S_{YX}(s)$、$S_Y(s)$分别与$R_X(\tau)$、$R_{XY}(\tau)$、$R_{YX}(\tau)$、$R_Y(\tau)$构成双边拉普拉斯变换对，其中$R_Y(\tau)$与$S_Y(s)$的关系是

$$S_Y(s)=\int_{-\infty}^{\infty}R_Y(\tau)\,e^{-s\tau}d\tau \tag{4.25}$$

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}S_Y(s)e^{s\tau}ds \tag{4.26}$$

$S'_X(z)$、$S'_{XY}(z)$、$S'_{YX}(z)$、$S'_Y(z)$分别与$R_X(m)$、$R_{XY}(m)$、$R_{YX}(m)$、$R_Y(m)$构成双边Z变换对，其中$R_Y(m)$与$S_Y(z)$的关系是

$$S'_Y(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_Y(m)z^{-m} \tag{4.27}$$

$$R_Y(m)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}S'_Y(z)z^{m-1}dz \tag{4.28}$$

（二）单侧平稳随机信号激励下系统输出的统计特性

设图4.1的线性系统输入的单侧随机信号是平稳的（即在零时刻开始作用于系统的双侧平稳随机信号），根据时域中的卷积法，系统输出的表达式为

$$Y(t)=\int_0^t h(u)X(t-u)\mathrm{d}u \tag{4.29}$$

$$Y(n)=\sum_{k=0}^{n} h(k)X(n-k) \tag{4.30}$$

输出均值为

$$m_Y(t)=m_X\int_0^t h(u)\mathrm{d}u \tag{4.31}$$

$$m_Y(n)=m_X\sum_{k=0}^{n} h(k) \tag{4.32}$$

输入与输出间的互相关函数为

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\int_0^{t_2} h(u)R_X(\tau-u)\mathrm{d}u,\quad \tau=t_2-t_1 \tag{4.33}$$

$$R_{YX}(t_1,t_2)=\int_0^{t_1} h(u)R_X(\tau+u)\mathrm{d}u \tag{4.34}$$

$$R_{XY}(n_1,n_2)=\sum_{k=0}^{n_2} h(k)R_X(m-k),\quad m=n_2-n_1 \tag{4.35}$$

$$R_{YX}(n_1,n_2)=\sum_{k=0}^{n_1} h(k)R_X(m+k) \tag{4.36}$$

输出的自相关函数为

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(u)h(v)R_X(\tau+u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{4.37}$$

$$R_Y(n_1,n_2)=\sum_{k=0}^{n_1}\sum_{i=0}^{n_2} h(k)h(i)R_X(m+k-i) \tag{4.38}$$

可见，虽然输入随机信号是平稳的，但输出随机信号不再是平稳的。

（三）例解

1．计算系统输出表达式的例子　计算系统输出表达式时，

据根输入的情况，对于连续时间系统采用式(4.1) 或式(4.29)；对于离散时间系统采用式 (4.2) 或式 (4.30)。

〔例4.1〕 设确定性随机信号为

$$X(t)=M+B\cos(20t+\Theta)$$

其中 M、B、Θ 是随机变量。将 $X(t)$ 输入到单位冲激响应为 $h(t)=10e^{-10t}U(t)$ 的系统的输入端，求系统输出随机信号的表达式。

解：根据式 (4.1)，有

$$Y(t)=h(t)*X(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t-u)X(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-\infty}^{t}10e^{-10(t-u)}[M+B\cos(20u+\Theta)]\mathrm{d}u$$

$$=M+\frac{B}{5}[\cos(20t+\Theta)+2\sin(20t+\Theta)]$$

值得注意的是，初学者在求解这类问题时，可能采取的方法是：先对输入随机信号和系统的单位冲激响应进行傅氏变换得 $X(\omega)$ 和 $H(\omega)$，再令系统输出响应的傅氏变换 $Y(\omega)=H(\omega)\cdot X(\omega)$，最后求 $Y(\omega)$ 的傅氏反变换得 $Y(t)$，从概念上讲这种做法是错误的。因为随机信号的能量是无限的，不满足傅氏变换绝对可积的条件，即其傅氏变换不存在。这是随机信号和确定信号通过线性系统的分析方法区别之一。建议读者在学习本章时，把分析随机信号和确定信号分别通过线性系统的分析方法进行对比，以便更好地掌握本章的内容。

2．计算输出均值的例子 计算系统输出均值时，对于连续时间系统，可采用的公式是式 (4.3)、(4.11)、(4.31)；对于离散时间系统，可用公式 (4.4)、(4.12)、(4.32)。

〔例4.2〕 在例4.1中，设 M 是一个均值为5，方差为64的高斯随机变量，B 是均方值为32且服从瑞利分布的随机变量，Θ 是在〔0,2π〕上服从均匀分布的随机变量。M、B 和 Θ 相互统计独立，求系统输出的均值。

解：可以证明$X(t)$的均值$m_X=5$，我们采用式（4.3）计算m_Y。

$$m_Y=m_X\int_0^\infty h(t)\mathrm{d}t=m_X\int_0^\infty 10\mathrm{e}^{-10t}\mathrm{d}t=m_X=5$$

我们亦可采用式（4.11）来计算。$h(t)$的傅氏变换为

$$H(\omega)=\frac{10}{10+\mathrm{j}\omega}$$

于是

$$m_Y=m_XH(0)=m_X\cdot\frac{10}{10+\mathrm{j}0}=m_X=5$$

3．计算相关函数和功率谱密度的例子　用时域中的卷积法求系统输出自相关函数和功率谱密度、输出与输入之间互相关函数和互功率谱密度的步骤：

（1）求系统的单位冲激响应$h(t)$或$h(n)$；

（2）确定输入随机信号的自相关函数；

（3）利用公式（4.5）至（4.8）计算互相关函数；

（4）利用公式（4.9）和(4.10）计算输出自相关函数；

（5）取互相关函数、自相关函数的正变换（对于连续系统，取傅氏变换或拉氏变换；对于离散系统取Z变换或离散时间傅氏变换）得互功率谱密度和输出功率谱密度。

以上是双侧平稳随机信号输入时的计算步骤。对于单侧平稳随机信号输入的情况，只能按式（4.33）至（4.38）来计算。

用频域分析法计算相关函数和功率谱密度的步骤：

（1）计算系统的传递函数；

（2）确定输入随机信号的功率谱密度；

（3）利用公式（4.13）至（4.16）、式（4.17）至(4.20)计算输出与输入互功率谱密度；

（4）利用公式（4.21）至（4.24）计算输出的功率谱密度；

（5）取互功率谱密度、输出功率谱密度的反变换（对于连

续系统，取拉氏反变换较方便；对于离散系统，取Z反变换较方便。）得互相关函数、自相关函数。

频域分析法只适于系统的输入与输出皆为平稳随机信号的情况。

〔例4.3〕 两个相互独立的随机电压信号$X_1(t)$和$X_2(t)$施加于如图4.2所示的RC网络上。已知$S_{X_1}(\omega)=K$，$S_{X_2}(\omega)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$，假设电路中的电阻是无噪的，求系统输出的自相关函数$R_Y(\tau)$和功率谱密度$S_Y(\omega)$。

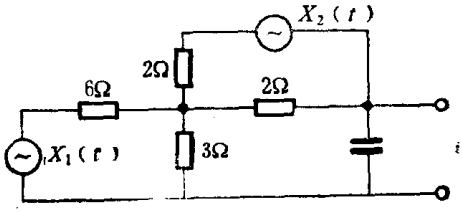


图 4.2 信号$X_1(t)$和$X_2(t)$施加在RC网络上

解：方法1：时域中的卷积法。

由于RC网络是线性的，根据叠加原理，则输出电压可以表示为

$$Y(t)=Y_1(t)+Y_2(t)$$

其中$Y_1(t)$是$X_1(t)$的响应（设$X_2(t)=0$），$Y_2(t)$是$X_2(t)$的响应（设$X_1(t)=0$）。因为$X_1(t)$和$X_2(t)$是相互独立的平稳随机信号，所以，$Y_1(t)$和$Y_2(t)$也是相互独立的平稳随机信号，于是，输出$Y(t)$的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=E[Y(t)Y(t+\tau)]\\&=E[(Y_1(t)+Y_2(t))(Y_1(t+\tau)+Y_2(t+\tau))]\\&=R_{Y_1}(\tau)+R_{Y_2}(\tau)+2m_{Y_1}m_{Y_2}\end{aligned}$$

式中$R_{Y_1}(\tau)$、$R_{Y_2}(\tau)$和m_{Y_1}、m_{Y_2}分别是$Y_1(t)$、$Y_2(t)$的自相关函数和均值。下面分别求之。

根据已知条件，求得

$$R_{X_1}(\tau)=K\delta(\tau)\qquad R_{X_2}(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$$

因为输入随机信号$X_1(t)$和$X_2(t)$的均值

$$m_{X_1}^2=\lim_{|\tau|\to\infty}R_{X_1}(\tau)=\lim_{|\tau|\to\infty}K\delta(\tau)=0$$

$$m_{X_2}^2=\lim_{|\tau|\to\infty}R_{X_2}(\tau)=\lim_{|\tau|\to\infty}e^{-\alpha|\tau|}=0$$

所以$m_{Y_1}=0$、$m_{Y_2}=0$（见式(4.3)），于是

$$R_Y(\tau)=R_{Y_1}(\tau)+R_{Y_2}(\tau)$$

设$Y_1(t)$与$X_1(t)$、$Y_2(t)$与$X_2(t)$之间的单位冲激响应分别为$h_1(t)$和$h_2(t)$，则根据图4.2得

$$h_1(t)=\frac{1}{9}e^{-\frac{t}{3}}U(t)\qquad h_2(t)=\frac{1}{6}e^{-\frac{t}{3}}U(t)$$

根据式（4.9），有

$$\begin{aligned}R_{Y_1}(\tau)&=\iint_0^\infty h_1(u)h_1(v)R_{X_1}(\tau+u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_0^\infty h_1(u)\mathrm{d}u\int_0^\infty h_1(v)K\delta(\tau+u-v)\mathrm{d}v\\&=K\int_0^\infty h_1(u)h_1(\tau+u)\mathrm{d}u\\&=\begin{cases}K\int_0^\infty\frac{1}{9}e^{-\frac{1}{3}u}\cdot\frac{1}{9}e^{-\frac{1}{3}(\tau+u)}\mathrm{d}u, & \tau\geqslant0\\K\int_{-\tau}^\infty\frac{1}{9}e^{-\frac{1}{3}u}\cdot\frac{1}{9}e^{-\frac{1}{3}(\tau+u)}\mathrm{d}u, & \tau\leqslant0\end{cases}\end{aligned}$$

当$\tau\geqslant0$时，

$$R_{Y_1}(\tau)=\frac{K}{54}e^{-\frac{1}{3}\tau}$$

当$\tau<0$时，由$R_{Y_1}(\tau)$的偶对称性得

$$R_{Y_1}(\tau)=\frac{K}{54}e^{\frac{1}{3}\tau}$$

最后得

$$R_{Y_1}(\tau)=\frac{K}{54}e^{-\frac{1}{3}|\tau|}$$

$R_{Y_2}(\tau)$ 的计算

$$R_{Y_2}(\tau)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h_2(u)h_2(v)R_{X_2}(\tau+u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h_2(u)h_2(v)\ \mathrm{e}^{-\alpha|\tau+u-v|}\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

当$\tau\geqslant 0$时，

$$R_{Y_2}(\tau)=\int_0^{\infty} h_2(u)\left[\int_0^{\tau+u}\mathrm{e}^{-\alpha(\tau+u-v)}\ h_2(v)\mathrm{d}v\right.$$

$$\left.+\int_{\tau+u}^{\infty}\mathrm{e}^{\alpha(\tau+u-v)}\ h_2(v)\ \mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4(1-9\alpha^2)}\left[\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\ -3\alpha\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\tau}\right]$$

于是

$$R_{Y_2}(\tau)=\frac{1}{4(1-9\alpha^2)}\left[\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}\ -3\alpha\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}|\tau|}\right]$$

因此

$$R_Y(\tau)=\left[\frac{K}{54}-\frac{3\alpha}{4(1-9\alpha^2)}\right]\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}|\tau|}\ +\frac{1}{4(1-9\alpha^2)}\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$$

对上式进行傅氏变换得

$$S_Y(\omega)=\frac{2K(\omega^2+\alpha^2)+9\alpha}{18(1+9\omega^2)(\alpha^2+\omega^2)}$$

方法2：频域分析法。

设$Y_1(t)$ 与$X_1(t)$ 之间、$Y_2(t)$ 与$X_2(t)$ 之间的传递函数分别是$H_1(\omega)$ 和$H_2(\omega)$，则求得

$$H_1(\omega)=\frac{1}{3(1+\mathrm{j}3\omega)}\qquad H_2(\omega)=\frac{1}{2(1+\mathrm{j}3\omega)}$$

因此

$$S_{Y_1}(\omega)=|H_1(\omega)|^2S_{X_1}(\omega)=\frac{K}{9(1+9\omega^2)}$$

$$S_{Y_2}(\omega)=|H_2(\omega)|^2S_{X_2}(\omega)=\frac{\alpha}{2(1+9\omega^2)(\alpha^2+\omega^2)}$$

由于输入$X_1(t)$和$X_2(t)$是独立的，所以$Y_1(t)$与$Y_2(t)$之间也是独立的。又$Y_1(t)$和$Y_2(t)$各自的功率谱密度在$\omega=0$处无冲激函数，这意味着它们没有直流分量。因而，$Y_1(t)$和$Y_2(t)$也是不相关的、正交的，则有

$$S_Y(\omega)=S_{Y_1}(\omega)+S_{Y_2}(\omega)=\frac{2K(\omega^2+\alpha^2)+9\alpha}{18(1+9\omega^2)(\alpha^2+\omega^2)}$$

输出自相关函数可通过对上式进行傅氏反变换得到。

显然，当输入和输出皆平稳时，采用频域分析方法较为方便。

〔例4.4〕 在图4.3所示的反馈系统中，$N(t)$为白噪声，$S_N(\omega)=1$，随机信号$X(t)$与$N(t)$不相关。设

$$H_0(\omega)=\frac{H_b(\omega)H_f(\omega)}{1+H_a(\omega)H_b(\omega)H_f(\omega)}$$

的傅氏反变换为$h_0(t)$，试证$Y(t)$与$N(t)$的互相关函数$R_{NY}(\tau)=-h_0(\tau)$。

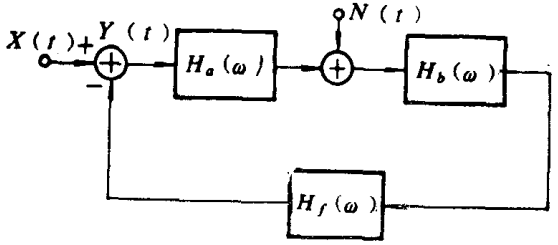


图 4.3 反馈系统

解：(1) 求$Y(t)$与$N(t)$的关系。为了求$Y(t)$与$N(t)$的关系，先假设$X(t)$、$Y(t)$、$N(t)$都是确定信号，分别记为$x(t)$、$y(t)$和$n(t)$，它们的傅氏变换为$X(\omega)$、$Y(\omega)$和$N(\omega)$，则有

$$Y(\omega)=-H_b(\omega)H_f(\omega)N(\omega)+X(\omega)$$
$$-H_a(\omega)H_b(\omega)H_f(\omega)Y(\omega)$$

解得

$$Y(\omega)=-\frac{H_b(\omega)H_f(\omega)}{1+H_a(\omega)H_b(\omega)H_f(\omega)}N(\omega)$$

$$+\frac{1}{1+H_a(\omega)H_b(\omega)H_f(\omega)}X(\omega)$$

$$=-H_0(\omega)N(\omega)+H_1(\omega)X(\omega)$$

式中

$$H_1(\omega)=\frac{1}{1+H_a(\omega)H_b(\omega)H_f(\omega)}$$

令 $$h_1(t)=\mathscr{F}^{-1}[H_1(\omega)]$$

则

$$y(t)=-h_0(t)*n(t)+h_1(t)*x(t)$$

于是，随机信号$Y(t)$ 与$N(t)$、$X(t)$ 的关系为

$$Y(t)=-h_0(t)*N(t)+h_1(t)*X(t)$$

（2）证明$R_{NY}(\tau)=-h_0(\tau)$。根据题意有

$$E[N(t)]=0 \qquad R_N(\tau)=\delta(\tau)$$

$$E[N(t_1)X(t_2)]=E[N(t_1)]E[X(t_2)]=0$$

于是

$$R_{NY}(\tau)=E[N(t)Y(t+\tau)]$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}h_0(u)E[N(t)N(t+\tau-u)]\mathrm{d}u$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}h_1(u)E[N(t)X(t+\tau-u)]\mathrm{d}u$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}h_0(u)R_N(\tau-u)\mathrm{d}u$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}h_0(u)\delta(\tau-u)\mathrm{d}u$$

$$=-h_0(\tau)$$

〔例4.5〕 电路如图4.4所示。设平稳随机信号$X(t)$ 的自相关函数$R_X(\tau)=Ae^{-\beta|\tau|}$，试求电路输出随机信号 $Y(t)$ 的自相

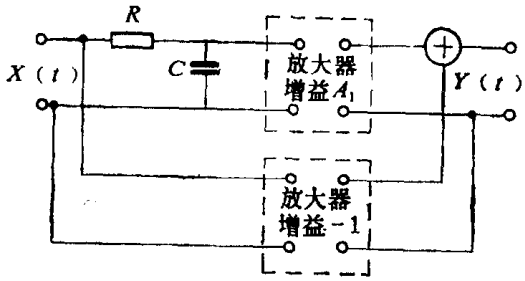


图 4.4 RC放大电路

关函数$R_Y(\tau)$。

解：采用频域分析法求解，可求得该电路的传递函数和$X(t)$的功率谱密度分别为

$$H(\omega)=\frac{\alpha A_1}{\alpha+j\omega}-1,\quad \alpha=\frac{1}{RC}$$

$$S_X(\omega)=\frac{2\beta A}{\beta^2+\omega^2}$$

根据式（4.21），有

$$S_Y(\omega)=|H(\omega)|^2S_X(\omega)=\frac{2\beta A[\alpha^2(A_1-1)^2+\omega^2]}{(\alpha^2+\omega^2)(\beta^2+\omega^2)}$$

$$=\left(\frac{K}{2\beta}+A\right)\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}-\frac{K}{2\alpha}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

求上式的傅氏反变换得

$$R_Y(\tau)=\left(\frac{K}{2\beta}+A\right)e^{-\beta|\tau|}\quad -\frac{K}{2\alpha}e^{-\alpha|\tau|}$$

式中 $K=2\beta A(A_1\alpha)^2/(\beta^2-\alpha^2)$。

〔例4.6〕 用频域分析法求图4.5(c) 所示的随机脉冲串$Y(t)$的功率谱密度。其中基本脉冲$p(t)$如图4.5(a)所示，每隔T_0秒重复一次。第m个脉冲是$a_mp(t)$，这里a_m是一个随机变量。α是在$(0,T_0)$上服从均匀分布的随机变量。α与a_m独立，且各个脉冲之间相互独立。

解：图4.5(c) 所示的脉冲串$Y(t)$可表示为

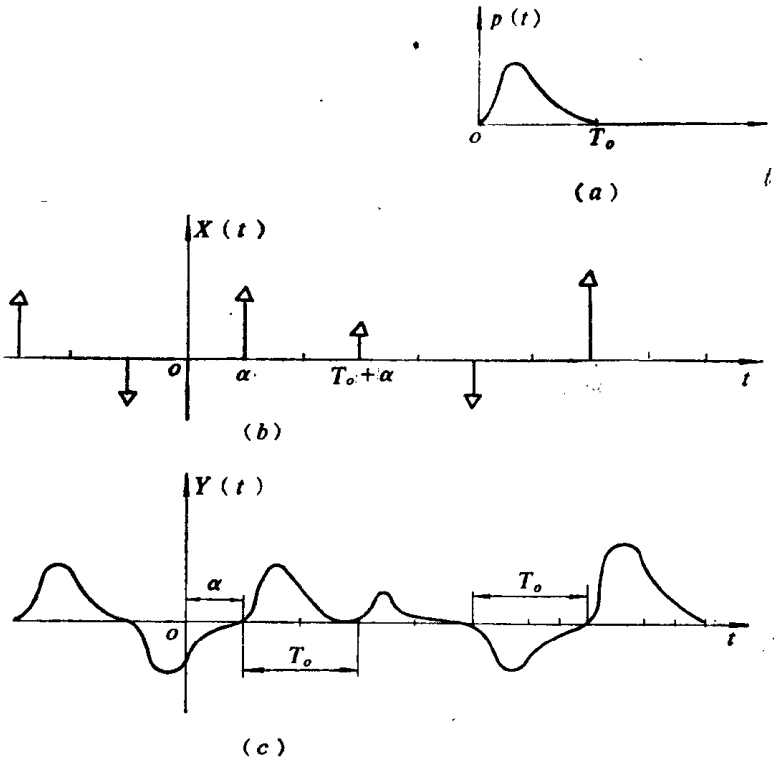


图 4.5 (a)基本脉冲；(b)冲激串；(c)随机脉冲串

$$Y(t)=\sum_m a_m p(t-mT_0-\alpha)$$

它可看作是图4.5(b) 所示的冲激串$X(t)$ 通过一个单位冲激响应为$p(t)$ 的线性系统的输出，其中冲激串 $X(t)$ 的第m 个 冲激的强度为a_m。读者可以证明$X(t)$ 是广义平稳的，并且求 得 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R_X(\tau)=\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n\delta(\tau-nT_0)$$

式中

$$R_n=E[a_m a_{m+n}]$$

于是$X(t)$ 的功率谱密度为

$$S_X(\omega)=\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_n\,e^{-jnT_0\omega}$$

$$=\frac{1}{T_0}\left[R_0+2\sum_{n=1}^{\infty}R_n\cos nT_0\omega\right]$$

今$P(\omega)$为$p(t)$的傅氏变换，则根据式（4.21）得$Y(t)$的功率谱密度为

$$S_Y(\omega)=|P(\omega)|^2S_X(\omega)$$

$$=\frac{1}{T_0}|P(\omega)|^2\left[R_0+2\sum_{n=1}^{\infty}R_n\cos nT_0\omega\right]$$

这是一个很有用的公式。利用这一结果可求各种随机脉冲串的功率谱密度，这比直接从自相关函数的定义出发来求，方便得多。

〔例4.7〕 设描述离散系统的差分方程为

$$y(n)+0.81y(n-2)=x(n)$$

若输入端作用的是功率谱密度$S'_X(z)=4$的白噪声，试求输出随机信号的功率谱密度和自相关函数。

解：根据差分方程，求得系统的传递函数为

$$H(z)=\frac{z^2}{z^2+0.81}$$

系统的单位冲激响应为

$$h(n)=(0.9)^n\cos\frac{\pi}{2}n\cdot U(n)$$

于是

$$S_Y(z)=H(z)H(z^{-1})S'_X(z)=\frac{4}{(z^2+0.81)(z^{-2}+0.81)}$$

或

$$S_Y(\omega)=S'_Y(e^{j\omega})=\frac{4}{(e^{j2\omega}+0.81)(e^{-j2\omega}+0.81)}$$

$$=\frac{4}{1.6561+1.62\cos2\omega}$$

输出的自相关函数为

$$R_Y(m)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}h(k)h(i)R_X(m+k-i)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}h(k)h(i)\cdot 4\delta(m+k-i)$$

当$m\geqslant 0$时

$$R_Y(m)=4\sum_{k=0}^{\infty}h(k)h(m+k)$$

$$=4\sum_{k=0}^{\infty}(0.9)^k\cos\frac{\pi}{2}k\cdot(0.9)^{m+k}\cos\frac{\pi}{2}(m+k)$$

$$=\frac{40000}{3439}(0.9)^m\cos\frac{\pi}{2}m$$

因为$R_Y(m)$是m的偶函数，所以

$$R_Y(m)=\frac{40000}{3439}(0.9)^{|m|}\cos\frac{\pi}{2}m$$

二、等效噪声带宽、平均功率和信噪比的计算

（一）系统的等效噪声带宽的计算

频域中计算系统的等效噪声带宽的公式为

$$\Delta\omega_e=\frac{1}{|H(\omega)|^2_{\max}}\int_0^{\infty}|H(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \qquad (4.39)$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}|H(\omega)|^2_{\max}}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty}H(s)H(-s)\mathrm{d}s \qquad (4.40)$$

对于低通滤波器，$|H(\omega)|_{\max}=|H(0)|$；对于具有以中心频率$\omega_0$对称的频率响应的带通滤波器，$|H(\omega)|_{\max}=|H(\omega_0)|$。

我们也可以得到在时域中计算系统的等效噪声带宽的公式。对于低通滤波器有

$$\Delta\omega_e=\frac{\pi\int_0^{\infty}h^2(t)\,\mathrm{d}t}{\left[\int_0^{\infty}h(t)\,\mathrm{d}t\right]^2} \tag{4.41}$$

对于带通滤波器有

$$\Delta\omega_e=\frac{\pi}{|H(\omega)|^2_{\max}}\int_0^{\infty}h^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.42}$$

在求$\Delta\omega_e$时，当系统的传递函数为有理函数时，采用式（4.40）并运用附录B中的积分公式较容易；当系统的单位冲激响应较简单或系统的传递函数为非有理函数时，采用式（4.41）或式（4.42）计算。例4.8将是一个很好的说明。

（二）系统输出平均功率的计算

设系统的输入和输出都是宽平稳的，则系统的输出平均功率的计算公式为

$$E[Y^2(t)]=R_Y(0)=\int_0^{\infty}\int h(u)h(v)R_X(u-v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{4.43}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2S_X(\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{4.44}$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty}H(s)H(-s)S_X(s)\,\mathrm{d}s \tag{4.45}$$

$$E[Y^2(n)]=R_Y(0)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}h(k)h(i)R_X(k-i) \tag{4.46}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2S_X(\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{4.47}$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_{|z|=1}H(z)H(z^{-1})S'_X(z)z^{-1}\mathrm{d}z \tag{4.48}$$

若输入随机信号的功率谱密度为有理函数，建议采用式（4.45）或式（4.48）计算系统输出的平均功率。计算时，先将输入功率谱密度按第三章介绍的谱分解定理进行分解，然后采用附录B中的积分公式。

当输入是功率谱密度为$N_0/2$的白噪声时，输出平均功率的计算公式为

$$E[Y^2(t)]=\frac{N_0\Delta\omega_e}{2\pi}|H(\omega)|^2_{\max} \tag{4.49}$$

（三）系统输出信噪比的计算

系统输出信噪比定义为

$$\text{信噪比(SNR)}=\frac{\text{输出信号平均功率}}{\text{输出噪声平均功率}}=\frac{\overline{s_o^2(t)}}{E[N_o^2(t)]} \tag{4.50}$$

式中

$$\overline{s_o^2(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}s_o^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.51}$$

其中$s_o(t)$是含有所需要的有用信息的输入信号（确定信号或遍历随机信号）的响应。若$s_o(t)$是平稳随机信号，那么应把式（4.50）中的$\overline{s_o^2(t)}$改写为$E[s_o^2(t)]$；$N_0(t)$是系统输出的平稳噪声，它是输入噪声的响应。

（四）例解

〔例4.8〕 (1) 证明式（4.41）；(2) 计算单位冲激响应为

$$h(t)=\frac{1}{T}[U(t)-U(t-T)]$$

的有限时间积分器的等效噪声带宽。

解：(1) 利用Parseval定理来证。该定理的内容是：对于可积函数$f(t)$，若它的傅氏变换存在，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

对于低通滤波器有

$$H(0)=\int_0^{\infty}h(t)\mathrm{d}t$$

对式（4.39）的积分项，利用Parseval定理得

$$\int_0^{\infty}|H(\omega)|^2\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2}\left[2\pi\int_{-\infty}^{\infty}h^2(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\pi\int_0^{\infty}h^2(t)\mathrm{d}t$$

于是，把$H(0)$和上式代入式（4.39）即得式（4.41）。

$$(2)\int_0^{\infty}h(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{1}{T}[U(t)-U(t-T)]\mathrm{d}t=1$$

$$\int_0^{\infty}h^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T^2}\int_0^{T}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}$$

根据式（4.41）得积分器的等效噪声带宽

$$\Delta\omega_e=\frac{\pi\int_0^{\infty}h^2(t)\mathrm{d}t}{\left[\int_0^{\infty}h(t)\mathrm{d}t\right]^2}=\frac{\pi/T}{1}=\frac{\pi}{T}$$

若用式（4.39）计算$\Delta\omega_e$，就不如用式（4.41）计算简单。读者不妨试做一下。此外，可进一步得

$$\Delta\omega_e=2.26\Delta\omega_{3\mathrm{dB}}$$

式中$\Delta\omega_{3\mathrm{dB}}$表示积分器的3dB带宽。

〔例4.9〕 描述离散时间系统的差分方程为

$$y(n)-ay(n-1)=bx(n)$$

其中$0<a<1$，试求该系统的等效噪声带宽。

解：该系统的传递函数为

$$H(z)=\frac{bz}{z-a}$$

相应的单位冲激响应为

$$h(n)=ba^nU(n)$$

读者可以证明，低通离散系统的等效噪声带宽计算公式为

$$\Delta\omega_e=\frac{\pi\sum_{n=0}^{\infty}h^2(n)}{\left[\sum_{n=0}^{\infty}h(n)\right]^2}$$

或

$$\Delta\omega_e=|H(e^{j0})|^{-2}\int_0^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2d\omega$$

$$=\left|H(z)\right|_{z=1}^{-2}\cdot\frac{1}{2j}\oint_{|z|=1}H(z)H(z^{-1})z^{-1}dz$$

下面在时域中求$\Delta\omega_e$。

$$\sum_{n=0}^{\infty}h^2(n)=b^2\sum_{n=0}^{\infty}a^{2n}=b^2(1-a^2)^{-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}h(n)=b\sum_{n=0}^{\infty}a^n=b(1-a)^{-1}$$

于是

$$\Delta\omega_e=\frac{\pi b^2/(1-a^2)}{[b/(1-a)]^2}=\pi(1-a)(1+a)^{-1}$$

〔**例4.10**〕 图4.6表示一个由滤波器与电动机组成的伺服系统。输入$X(t)=A(t)\sin(\omega_0t+\Phi)$，其中相位$\Phi$是$(0,2\pi)$上的均匀分布的随机变量，$A(t)$是自相关函数$R_A(\tau)=Ae^{-a|\tau|}$的平稳随机过程，$\Phi$与$A(t)$独立。滤波器和电动机的传递函数如图4.6中所示。试求电动机跟不上输入信号之均方误差$E[\varepsilon^2(t)]$，即求$[X(t)-Y(t)]$的平均功率。

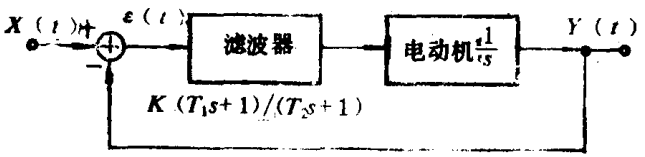


图 4.6 伺服系统

解：读者可以证明，$X(t)$ 是宽平稳的，其自相关函数

$$R_X(\tau)=\frac{A}{2}e^{-a|\tau|}\cos\omega_0\tau$$

功率谱密度

$$S_X(s)=aA\frac{s+k_1}{(s+k_2)(s-k_3)}\cdot\frac{k_1-s}{(s-k_2)(s+k_3)}$$

式中

$$k_1=[\omega_0^2+a^2]^{1/2}\quad k_2=a+j\omega_0\quad k_3=-a+j\omega_0$$

当我们把 $X(t)$ 作为输入而把 $\varepsilon(t)$ 作为输出时，不难得出 $X(t)$ 到 $\varepsilon(t)$ 的传递函数为

$$H(s)=\frac{T_2s^2+s}{T_2s^2+(KT_1+1)s+K}$$

因此 $\varepsilon(t)$ 的功率谱密度为

$$\begin{aligned}S_\varepsilon(s)&=H(s)H(-s)S_X(s)\\&=aA\frac{T_2s^2+s}{T_2s^2+(KT_1+1)s+K}\times\frac{T_2s^2-s}{T_2s^2-(KT_1+1)s+K}\\&\quad\times\frac{s+k_1}{(s+k_2)(s-k_3)}\times\frac{k_1-s}{(s-k_2)(s+k_3)}\\&=aA\frac{T_2s^3+m_1s^2+k_1s}{T_2s^4+m_2s^3+m_3s^2+m_4s-m_5}\\&\quad\times\frac{-T_2s^3+m_1s^2-k_1s}{T_2s^4-m_2s^3+m_3s^2-m_4s-m_5}\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}m_1&=k_1T_2+1\\m_2&=KT_1+T_2k_2-T_2k_3+1\\m_3&=K+(KT_1+1)(k_2-k_3)-T_2k_2k_3\\m_4&=K(k_2-k_3)-(KT_1+1)k_2k_3\\m_5&=Kk_2k_3\end{aligned}$$

根据式（4.45），$\varepsilon(t)$ 的均方误差为

$$E[\varepsilon^2(t)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}S_\varepsilon(s)ds$$

$$= \frac{aA}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{T_2 s^3 + m_1 s^2 + k_1 s}{T_2 s^4 + m_2 s^3 + m_3 s^2 + m_4 s - m_5} \times \frac{-T_2 s^3 + m_1 s^2 - k_1 s}{T_2 s^4 - m_2 s^3 + m_3 s^2 - m_4 s - m_5} \mathrm{d}s$$

按附录B中的积分公式，得

$$E[\varepsilon^2(t)] = aAI_4$$

$$d_4 = T_2 \quad d_3 = m_2 \quad d_2 = m_3 \quad d_1 = m_4 \quad d_0 = -m_5$$

$$c_3 = T_2 \quad c_2 = m_1 \quad c_1 = k_1 \quad c_0 = 0$$

最后得

$$E[\varepsilon^2(t)] = aA\,\frac{T_2(m_2 m_5 + m_3 m_4) + m_4(m_1^2 - 2k_1 T_2) + m_2 k_1^2}{2(m_5 m_1^2 - m_4^2 T_2 + m_2 m_3 m_4)}$$

〔**例4.11**〕 某雷达天线位置控制系统如图4.7所示。图中$X(t)$是雷达回波，也是雷达天线角位置的控制信号，由于预先目标位置未知，因此可以假设$X(t)$是随机的。$Y(t)$是$X(t)$的响应，即天线的角位置信号。干扰$N(t)$表示吹在天线上的风对天线位置的影响，因此，在角位置上产生一个随机扰动$M(t)$。放大器与电动机的传递函数为

$$H(s) = \frac{A}{s(s+1)}$$

如果$X(t)$的功率谱密度为

$$S_X(s) = \frac{2}{1 - s^2}$$

干扰噪声$N(t)$的功率谱密度为

$$S_N(s) = \delta(s) - \frac{1}{s^2 - 0.25}$$

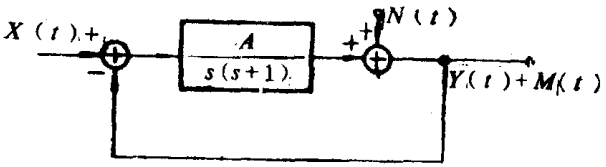


图 4.7 某雷达天线位置控制系统

求该系统输出的信噪比。

解：令$N(t)=0$，求得$Y(t)$与$X(t)$之间的传递函数

$$H_{XY}(s)=\frac{H(s)}{1+H(s)}=\frac{A}{s^2+s+A}$$

输出$Y(t)$的功率谱密度

$$S_Y(s)=H_{XY}(s)H_{XY}(-s)S_X(s)$$

$$=\frac{-2A^2}{(s^2+s+A)(s^2-s+A)(s^2-1)}$$

$Y(t)$的平均功率

$$E[Y^2(t)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}S_Y(s)ds$$

$$=\frac{2A^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{ds}{[s^3+2s^2+(A+1)s+A][-s^3+2s^2-(A+1)s+A]}$$

根据附录B有

$$E[Y^2(t)]=2A^2I_3$$

$$c_0=1 \quad c_1=0 \quad c_2=0$$

$$d_0=A \quad d_1=A+1 \quad d_2=2 \quad d_3=1$$

得

$$E[Y^2(t)]=\frac{2A}{A+2}$$

令$X(t)=0$，求得$M(t)$与$N(t)$之间的传递函数

$$H_{NM}(s)=\frac{1}{1+H(s)}=\frac{s(s+1)}{s^2+s+A}$$

输出干扰$M(t)$的功率谱密度

$$S_M(s)=H_{NM}(s)H_{NM}(-s)S_N(s)$$

$$=\frac{s^2(s^2-1)}{(s^2+s+A)(s^2-s+A)(s^2-0.25)}$$

$M(t)$的均方值

$$E[M^2(t)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}S_M(s)ds$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{s(s+1)}{s^3+1.5s^2+(A+0.5)s+0.5A}$$

$$\times \frac{s(s-1)}{-s^3+1.5s^2-(A+0.5)s+0.5A}\mathrm{d}s$$

根据附录B中的积分公式，有

$$E[M^2(t)]=I_3$$

$$c_0=0 \qquad c_1=1 \qquad c_2=1$$

$$d_0=0.5A \qquad d_1=A+0.5 \qquad d_2=1.5 \qquad d_3=1$$

于是

$$E[M^2(t)]=I_3=\frac{A+1.5}{2A+1.5}$$

因此，输出信噪比为

$$\text{信噪比(SNR)}=\frac{E[Y^2(t)]}{E[M^2(t)]}=\frac{2A(2A+1.5)}{(A+2)(A+1.5)}$$

显然，若放大器的增益A可调，则当A增大时，所希望信号的平均功率随之增大，而不希望的噪声平均功率减小，结果使输出信噪比变大。如果以输出信噪比作为重要准则的话，则希望较大的A值。

〔例4.12〕 用雷达测量地球与月球之间的距离D，则得结果为

$$X(n)=D+V(n)$$

其中$V(n)$是零均值、σ_V^2方差的白噪声，它表示测量误差。为了得到比较精确的距离，现采用以下两种滤波器分别对$X(n)$进行信号处理，试比较这两种滤波器输出的方差σ_Y^2的大小。

滤波器 1　$y(n)=ay(n-1)+(1-a)x(n)$

滤波器 2　$y(n)=ax(n)+(1-a)x(n-1)$

其中$0<a<1$。

解：两个滤波器输入$X(n)$的方差

$$\sigma_X^2=E[(X(n)-m_X)^2]=E[V^2(n)]=\sigma_V^2$$

两个滤波器的传递函数分别为

$$H_1(z)=\frac{1-a}{1-az^{-1}} \qquad H_2(z)=a+(1-a)z^{-1}$$

当$\omega=0$时，$z=e^{j\omega}=1$，于是

$$H_1(1)=\frac{1-a}{1-a}=1 \qquad H_2(1)=a+(1-a)=1$$

因为所希望的信号D是直流信号，所以D完全不失真地通过以上两种滤波器。因此，两个滤波器的输出信号功率相同。

滤波器 1 输出的噪声平均功率为

$$\sigma_Y^2=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}H_1(z)H_1(z^{-1})\sigma_X^2 z^{-1}dz$$

$$=\frac{\sigma_X^2}{2\pi j}\oint_{|z|=1}\frac{1-a}{1-az^{-1}}\cdot\frac{1-a}{1-az}z^{-1}dz$$

$$=\frac{1-a}{1+a}\sigma_X^2 \qquad \text{（根据附录 } B\text{）}$$

滤波器 2 输出的噪声平均功率为

$$\sigma_Y^2=\sigma_X^2\sum_{k=0}^{\infty}h_2^2(k)=\sigma_X^2\sum_{k=0}^{\infty}[a\delta(k)+(1-a)\delta(k-1)]^2$$

$$=[a^2+(1-a)^2]\sigma_X^2$$

两个滤波器的σ_Y^2/σ_X^2与 a 的关系如图4.8所示。

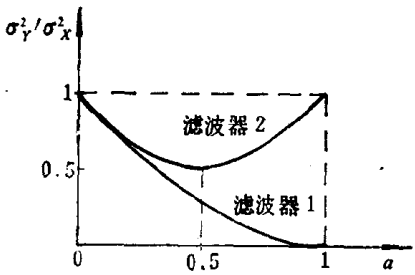


图 4.8 σ_Y^2/σ_X^2与 a 的关系

根据以上分析计算，得出两点结论：(1) 两种滤波器对直流信号D的增益相同，且能使D毫不失真地通过，这正是所希望的。(2) $(\sigma_Y^2/\sigma_X^2)\leqslant 1$，这说明使用这两种滤波器对 $X(n)$ 做信号处理，都能降低$V(n)$ 对D的影响。从图 4.8 中可以看出，当

$a=0.5$时，滤波器2的σ_Y^2/σ_X^2达到极小，即此时该滤波器能最大限度地抑制输入噪声。而滤波器1的σ_Y^2/σ_X^2始终小于滤波器2的σ_Y^2/σ_X^2，这说明前者抑制噪声的能力强于后者。

〔**例4.13**〕 已知离散时间随机信号

$$X(n)=V(n)+\sum_{i=1}^{L}A_i\exp[\mathrm{j}(\omega_i n+\Phi_i)]$$

其中Φ_i $(i=1,2,\cdots,L)$是在$(0,2\pi)$上服从均匀分布的随机变量，并且它们之间相互独立；$V(n)$是均值为零、方差为σ_V^2的白噪声，$V(n)$与Φ_i独立；A_i为常数。若将$X(n)$输入到传递函数为

$$H(z)=a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Mz^{-M}$$

的线性滤波器上，产生输出$Y(n)$，试求$Y(n)$的平均功率。

解：根据题意，该滤波器的频率响应为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=0}^{M}a_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

单位冲激响应为

$$h(n)=a_n,\quad n=0,1,\cdots,M$$

$Y(n)$的表达式为

$$Y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)X(n-k)=\sum_{k=0}^{M}a_kX(n-k)$$

读者可以证明，$X(n)$的自相关函数

$$R_X(m)=\sigma_V^2\delta(m)+\sum_{i=1}^{L}|A_i|^2\exp(\mathrm{j}m\omega_i)$$

于是，$Y(n)$的平均功率

$$\begin{aligned}Q=E[Y(n)Y^*(n)]&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}h(k)h^*(l)R_X(k-l)\\&=\sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{M}h(k)h^*(l)\Big[\sigma_V^2\delta(k-l)\\&\quad+\sum_{i=1}^{L}|A_i|^2\exp\{\mathrm{j}(k-l)\omega_i\}\Big]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sigma_V^2\sum_{k=0}^{M}h(k)h^*(k)\\
&+\sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{M}\sum_{i=1}^{L}h(k)h^*(l)|A_i|^2\exp\{\mathrm{j}(k-l)\omega_i\}\\
&=\sigma_V^2\sum_{k=0}^{M}a_ka_k^*+\sum_{i=1}^{L}|A_i|^2\\
&\times\Big(\sum_{k=0}^{M}a_k\exp\{\mathrm{j}k\omega_i\}\Big)\Big(\sum_{l=0}^{M}a_k\exp\{\mathrm{j}l\omega_i\}\Big)^*\\
&=\sigma_V^2\sum_{k=0}^{M}a_ka_k^*+\sum_{i=1}^{L}|A_i|^2H(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_i})H^*(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_i})\\
&=\sigma_V^2\sum_{k=0}^{M}|a_k|^2+\sum_{i=1}^{L}|A_i|^2\cdot|H(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_i})|^2
\end{aligned}
$$

三、ARMA,MA和AR时间序列信号模型

（一）三种模型及其统计特性

为便于学习，我们把ARMA,MA和AR时间序列信号模型及其统计特性总结于表4.1中。

$$
\begin{bmatrix}
R_Y(0) & R_Y(1) & R_Y(2) & \cdots & R_Y(N)\\
R_Y(1) & R_Y(0) & R_Y(1) & \cdots & R_Y(N-1)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
R_Y(N) & R_Y(N-1) & R_Y(N-2) & \cdots & R_Y(0)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}1\\a_1\\\vdots\\a_N\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}\sigma_\chi^2\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}
\tag{4.52}
$$

式（4.52）左边的相关矩阵又称为Toeplotz矩阵。

（二）例解

〔**例4.14**〕 AR模型见表4.1，试证$Y(n)$的自相关函数的一般表示式为

$$R_Y(m)=\sum_{k=0}^{N}C_kp_k^{|m|}$$

证：由AR模型得

表 4.1

模型 \ 统计特性		功率谱密度$S_Y(\omega)$	自相关函数$Rr\ (m)$
ARMA	$\sum_{i=0}^{N} a_i Y(n-i) = \sum_{i=0}^{r} b_i X(n-i)$ $a_0=1 \quad N\geqslant r$	$\dfrac{\left\lvert\sum_{i=0}^{r} b_i e^{-j\omega i}\right\rvert^2}{\left\lvert\sum_{i=0}^{N} a_i e^{-j\omega i}\right\rvert^2}\sigma_x^2$	$\sum_{i=0}^{N} a_i R_{YX}(i) = \sum_{i=0}^{r} b_i R_X(i)$ $\sum_{i=0}^{N} a_i R_Y(i) = \sum_{i=0}^{r} b_i R_{YX}(i)$
MA	$Y(n) = \sum_{i=0}^{r} b_i X(n-i)$	$\left\lvert\sum_{i=0}^{r} b_i e^{-j\omega i}\right\rvert^2 \sigma_x^2$	$R_Y(m)=\sigma_x^2\sum_{i=0}^{r} b_i b_{m+i}$ $b_i=0,\ i>r$
AR	$\sum_{i=0}^{N} a_i Y(n-i) = X(n)$ $a_0=1$	$\left\lvert 1+\sum_{i=1}^{N} a_i e^{-j\omega i}\right\rvert^{-2} \sigma_x^2$	$R_Y(m)$满足 Yule-Walker 方程

说明：(1) $X(n)$ 是均值为零、方差为σ_x^2的白噪声。

(2) Yule—Walker 方程见式 (4.52)。

$$\sum_{k=0}^{N} a_k R_Y(k-m)=0 \tag{4.53}$$

式 (4.53) 的特征方程为

$$1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}=0 \tag{4.54}$$

设p_1、p_2、…、p_N为式 (4.54) 方程的不同的根，则有

$$R_Y(m)=\sum_{k=1}^{N} C_k p_k^m \qquad m\geqslant 0$$

因为$R_Y(m)=R_Y(-m)$，所以

$$R_Y(m)=\sum_{k=1}^{N} C_k p_k^{|m|} \quad m=0,\pm1,\cdots \tag{4.55}$$

其中C_1、C_2、…、C_N为常数，并且这些常数由$R_Y(m)$的N个初始条件来确定。

〔例4.15〕 已知二阶AR模型为

$$Y(n)+a_1Y(n-1)+a_2Y(n-2)=X(n) \qquad (4.56)$$

其中$X(n)$是零均值、σ_X^2方差的白噪声，试求使$Y(n)$平稳的条件和$R_Y(m)$。

解：求平稳条件。

二阶AR模型也可以由特征方程

$$1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}=0 \qquad (4.57)$$

描述。设p_1、p_2是式（4.57）的根，则

$$p_1,\ p_2=\frac{1}{2}(-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_2}) \qquad (4.58)$$

为了保证$Y(n)$是平稳的，这两个根应位于z平面单位圆之内，即p_1和p_2的模必须小于1。用数学式表示为

$$\left|\frac{1}{2}(-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_2})\right|<1$$

通过求解该不等式得

$$a_1+a_2>-1,\ a_2-a_1>-1,\ |a_2|<1$$

这就是使$Y(n)$平稳的条件。如图4.9所示。

下面确定$R_Y(m)$。

为方便起见，令$R(m)=R_Y(m)$，根据式（4.55），$R(m)$的表达式为

$$R(m)=C_1p_1^{|m|}+C_2p_2^{|m|} \qquad (4.59)$$

为了确定C_1和C_2，我们来求初始条件$R(0)$和$R(1)$。根据式（4.52），二阶AR模型的Yule-Walker方程为

$$\begin{bmatrix}R(0) & R(1) & R(2)\\ R(1) & R(0) & R(1)\\ R(2) & R(1) & R(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_X^2\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad (4.60)$$

在式（4.60）中，以$R(1)$、$R(2)$为变量，解得用a_1和a_2表示的$R(1)$、$R(2)$为

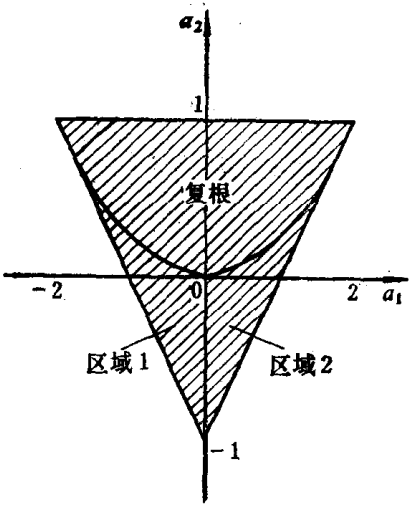


图 4.9 a_1、a_2的允许区域

$$R(1)=-\frac{a_1}{1+a_2}R(0),\qquad R(2)=\left(-a_2+\frac{a_1^2}{1+a_2}\right)R(0)$$

式中

$$R(0)=\frac{1+a_2}{(1-a_2)[(1+a_2)^2-a_1^2]}\sigma_X^2$$

利用$R(0)$和$R(1)$确定式（4.59）中的C_1和C_2，求得

$$C_1=\frac{p_1(p_2^2-1)}{(p_2-p_1)(1+p_1p_2)}R(0)$$

$$C_2=-\frac{p_2(p_1^2-1)}{(p_2-p_1)(1+p_1p_2)}R(0)$$

把C_1和C_2代入式（4.59）中得

$$R(m)=\left[\frac{p_1(p_2^2-1)}{(p_2-p_1)(1+p_1p_2)}p_1^{|m|}+\frac{p_2(p_1^2-1)}{(p_2-p_1)(1+p_1p_2)}p_2^{|m|}\right]R(0)\qquad(4.61)$$

下面分p_1、p_2为实数和复数两种情况来讨论$R(m)$。

情况1：当$a_1^2-4a_2\geqslant 0$时，p_1和p_2均为实根。这对应于图4.9

抛物线下的区域1和区域2。在区域1内，对于所有的 m，$R(m)$ 是正的，这对应于正根。在区域2中，$R(m)$ 正负交替变化，这对应于负根。

情况2：当 $a_1^2-4a_2<0$ 时，p_1 和 p_2 为复共轭根。这对应于图.49中抛物线界之上的阴影部分。在这种情况下，$R(m)$ 具有正弦衰减特性。例如，当 p_1（或 p_2）的实部等于它的虚部时

$$R(m)=R(0)a_2^{m/2}\left(\frac{\sin(m\theta+\psi)}{\sin\psi}\right)$$

其中 θ 和 ψ 由以下两式确定

$$\cos\theta=-a_1/2\sqrt{a_2}$$

$$\mathrm{tg}\psi=\left(\frac{1+a_2}{1-a_2}\right)\mathrm{tg}\theta$$

四、线性系统输出端随机信号概率密度的计算

（一）计算方法

一般说来，要想确定线性系统输出端随机信号的概率分布是极为困难的，但有两种情况比较容易。其一，当系统的输入为高斯随机信号时，输出亦为高斯随机信号；其二，系统的输入为非高斯随机信号，只要输入随机信号的带宽远大于系统的带宽时，系统输出的随机信号的分布近似于高斯分布。在这两种情况下，计算系统输出端概率分布的方法是：确定系统传递函数或单位冲激响应、计算输入随机信号的统计特性，利用前面介绍的分析方法，求出系统输出端随机信号的均值和相关函数集合，并把均值和相关函数代入高斯概率密度表达式中即可。

（二）例解

〔例4.16〕 设均值为零、自相关函数为 $\sigma_X^2\delta(m)$ 的白噪声通过传递函数为 $H(e^{j\omega})=b(1-ae^{-j\omega})^{-1}$ 的离散系统（$|a|<1$），求其输出端的二维概率密度。

解：在该题的假设下，系统的输出为高斯随机信号。输出均值为零，功率谱密度为

$$S_Y(\omega)=b^2\sigma_X^2(1+a^2-2a\cos\omega)^{-1}$$

输出自相关函数

$$R_Y(m)=\frac{\sigma_X^2b^2}{1-a^2}a^{|m|}$$

输出方差

$$\sigma_Y^2=R_Y(0)=\frac{\sigma_X^2b^2}{1-a^2}$$

把以上结果代入二维高斯概率密度表达式中，得

$$f_Y(y_1,y_2;m)=\frac{1-a^2}{2\pi b^2\sigma_X^2(1-a^{2|m|})^{1/2}}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1-a^2}{\sigma_X^2b^2}\cdot\frac{y_1^2-2y_1y_2a^{|m|}+y_2^2}{2(1-a^{2|m|})}\right\}$$

式中y_1、y_2分别为$Y(n_1)$和$Y(n_2)$的取值，$m=n_2-n_1$。

Ⅲ. 习　　题

4—1　已知系统的单位冲激响应$h(t)=5e^{-3t}U(t)$。设其输入随机信号$X(t)=M+4\cos(2t+\Theta)$，$(-\infty<t<\infty)$，其中M是随机变量、Θ是在$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量、且Θ与M相互独立，求输出表达式。

4—2　随机信号$X(t)=a\sin(\omega_0t+\Theta)$是单位冲激响应为$h(t)=te^{-t}U(t)$的线性系统的输入，设$a$和$\omega_0$为实常数，$\Theta$是在$(-\pi,\pi)$上均匀分布的随机变量，试求系统输出响应的表达式。

4—3　已知线性系统的单位冲激响应

$$h(t)=[5\delta(t)+3][U(t)-U(t-1)]$$

输入随机信号$X(t)=4\sin(2\pi t+\Theta)$，$(-\infty<t<\infty)$，其中$\Theta$是在$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量。试写出输出的表达式，并求输出的均值和方差。

4—4　输入随机信号$X(t)$的自相关函数$R_X(\tau)=a^2+be^{-|\tau|}$，式中$a$、$b$为正常数，试求单位冲激响应$h(t)=e^{-\alpha t}U(t)$的系统的输出均值$(\alpha>0)$。

4—5　若系统的单位冲激响应$h(t)=e^{-wt}\sin\omega_0tU(t)$，其中$w$、$\omega_0$为常数，重做题4—4。

4—6　设线性系统的单位冲激响应$h(t)=te^{-3t}U(t)$，其输入是具有

功率谱密度为$4V^2/Hz$的白噪声与2V直流分量之和，试求系统输出的均值、方差和均方值。

4—7 设输入随机信号$X(t)=M+B\cos(20t+\Theta)$，式中M是均值为5、方差为64的高斯随机变量，B是均方值为32的瑞利随机变量，Θ是在$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量，这三个随机变量相互独立。若系统的单位冲激响应$h(t)=\delta(t)-10e^{-10t}U(t)$，试求其输出的均值和均方值。

4—8 设线性系统的单位冲激响应$h(t)=3e^{-3t}U(t)$，其输入是自相关函数$R_X(\tau)=2e^{-4|\tau|}$的随机信号，试求输出自相关函数$R_Y(\tau)$、互相关函数$R_{XY}(\tau)$和$R_{YX}(\tau)$分别在$\tau=0$、$\tau=0.5$、$\tau=1$时的值。

4—9 设有限时间积分器的单位冲激响应$h(t)=U(t)-U(t-0.5)$，它的输入是功率谱密度为$10V^2/Hz$的白噪声，试求系统输出的均值、均方值、方差和输入输出互相关函数。

4—10 若输入平稳随机信号的自相关函数为$R_X(\tau)=16e^{-2|\tau|}$，重做题4—9。

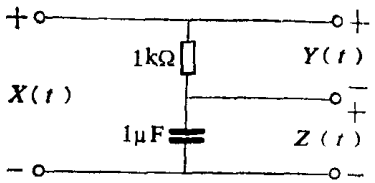
4—11 设系统的单位冲激响应$h(t)=\delta(t)-2e^{-2t}U(t)$，其输入随机信号的自相关函数$R_X(\tau)=16+16e^{-2|\tau|}$，试求系统输出的（总）平均功率和交流平均功率。

4—12 设有限时间积分器的单位冲激响应$h(t)=\frac{1}{T}[U(t)-U(t-T)]$，其输入平稳随机信号的自相关函数

$$R_X(\tau)=\begin{cases}A^2\left(1-\dfrac{|\tau|}{T}\right), & |\tau|\leqslant T\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试求输出的总平均功率和自相关函数。

4—13 电路如图题4—13所示。输入$X(t)$是功率谱密度为$0.1V^2/Hz$的白噪声，试求两个输出之间的互相关函数$R_{YZ}(\tau)$。



图题 4—13

4—14设系统的单位冲激响应 $h(t)=(1-t)[U(t)-U(t-1)]$，其输入平稳随机信号的自相关函数$R_X(\tau)=2\delta(\tau)+9$，试求系统输出的均值、(总)平均功率、自相关函数和系统输入输出互相关函数$R_{XY}(\tau)$或$R_{YX}(\tau)$。

4—15 设理想积分器的输出

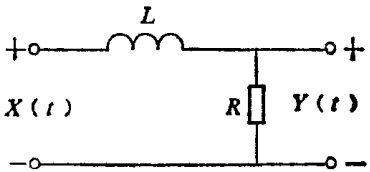
$$Y(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}X(u)\,\mathrm{d}u$$

式中T是积分时间，$X(t)$是均值为m_X、自协方差函数为$K_X(\tau)$的平稳随机信号，试证明：

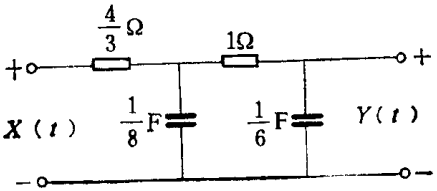
(1) $Y(t)$的方差 $\sigma_Y^2=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)K_X(\tau)\,\mathrm{d}\tau$；

(2) 当 $K_X(\tau)>0$ 时，$\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\leqslant\frac{2\tau_X}{T}$ (τ_X为$X(t)$的相关时间)。

4—16 电路如图题4—16所示。若输入随机信号的均值不为零，问改变电阻R的大小，是否会使输出均值发生变化？



图题 4—16



图题 4—17

4—17 电路如图题4—17所示。设输入白噪声的自相关函数$R_X(\tau)=S_0\delta(\tau)$，试求电路的输出平均功率。

4—18 某系统的传递函数

$$H(\omega)=\frac{j\omega-a}{j\omega+b}$$

若输入平稳随机信号的自相关函数为 $R_X(\tau)=e^{-r|\tau|}$，输出记为$Y(t)$，

试求互相关函数$R_{XY}(\tau)$。($a \neq b$)。

4—19 设系统$H(j\omega)$的输入是复随机信号，其自相关函数为

$$R_X(t_1,t_2)=e^{j(at_1-bt_2)}$$

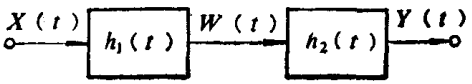
记输出为$Y(t)$，试证明：

$$R_{YX}(t_1,t_2)=H(ja)e^{j(at_1-bt_2)}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=H(ja)H^*(jb)e^{j(at_1-bt_2)}$$

4—20 设单独平稳且联合宽平稳过程$X_1(t)$和$X_2(t)$作用到单位冲激响应为$h(t)$的线性时不变系统，则响应分别为$Y_1(t)$和$Y_2(t)$。若$X(t)=X_1(t)+X_2(t)$作用时产生的响应为$Y(t)$，求由$h(t)$和$X_1(t)$与$X_2(t)$的统计特性表示的$E[Y(t)]$、$R_Y(t,t+\tau)$。

4—21 两个串联系统如图题4—21所示。输入$X(t)$是广义平稳随机信号，第一个系统的输出为$W(t)$，第二个系统的输出为$Y(t)$，试求$W(t)$和$Y(t)$的互相关函数$R_{WY}(t,t+\tau)$。



图题 4—21

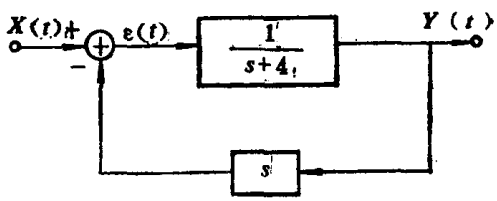
4—22 在题4—21中，设$X(t)$的功率谱密度为$10^{-3}V^2/Hz$，

$$h_1(t)=\frac{1}{T_1}[U(t)-U(t-T_1)],\quad h_2(t)=\frac{1}{T_2}[U(t)-U(t-T_2)]$$

试求下列三种情况下$Y(t)$的方差：

（1）$T_1=T_2=0.1$；（2）$T_1=0.1$和$T_2=0.01$；（3）$T_1=0.1$和$T_2=1.0$。

4—23 某控制系统如图题4—23所示。若输入宽平稳随机信号的功率谱密度



图题 4—23

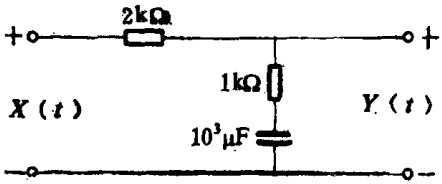
$$S_X(s) = \frac{10}{2 - s^2}$$

试求输出的功率谱密度、自相关函数、平均功率和$e(t)$的均方值。

4—24　电路如图题4—24所示。已知输入宽平稳随机信号的功率谱密度为

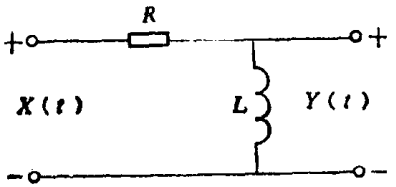
$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$$

试求输出功率谱密度。

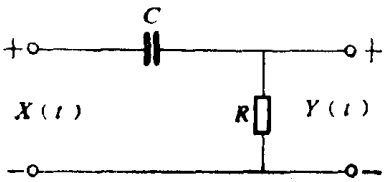


图题 4—24

4—25　电路如图题4—25所示。输入白噪声的功率谱密度为$N_0/2$，试求输出的功率谱密度和自相关函数。



图题 4—25



图题 4—26

4—26　若电路如图题4—26所示，重做题4—25。

4—27　设有一零均值的平稳随机信号$X(t)$加到单位冲激响应为

$$h(t) = \alpha e^{-\alpha t}[U(t) - U(t - T)]$$

的系统的输入端，证明系统输出功率谱密度为

$$S_Y(\omega)=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}(1-2e^{-\alpha T}\cos\omega T+e^{-2\alpha T})S_X(\omega)$$

4—28　已知条件见题4—20，证明$Y(t)$的功率谱密度为

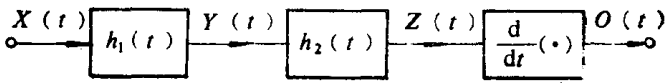
$$S_Y(\omega)=|H(\omega)|^2[S_{X_1X_2}(\omega)+S_{X_2X_1}(\omega)+S_{X_1}(\omega)+S_{X_2}(\omega)]$$

4—29　若题4—20中的$X_1(t)$和$X_2(t)$是统计独立的，求$S_Y(\omega)$。

4—30　线性系统如图题4—30所示。图中$X(t)$是均值为零、自相关函数$R_X(\tau)=10\cos100\tau$的宽平稳随机信号，并已知

$$h_1(t)=\delta(t-10)\qquad h_2(t)=2\times10^3\frac{\sin10^3(t-3)}{10^3(t-3)}$$

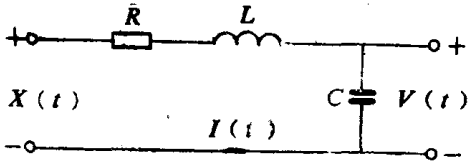
求$Y(t)$、$Z(t)$、$O(t)$各自的自相关函数与平均功率。



图题 4—30

4—31　设线性系统的单位冲激响应$h(t)=U(t)-U(t-1)$，其在功率谱密度为0.5V²/Hz的白噪声$X(t)$激励下的输出是$Y(t)$，求$S_{YX}(\omega)$和$S_{XY}(\omega)$分别在$\omega=0$、$\omega=0.5$、$\omega=1$处的值。

4—32　电路如图题4—32所示。电压$X(t)$是平稳的随机信号，其均值为1，自相关函数$R_X(\tau)=1+e^{-\alpha|\tau|}$。求$E[V(t)]$、$S_V(\omega)$、$S_{IV}(\omega)$和$S_I(\omega)$。



图题 4—32

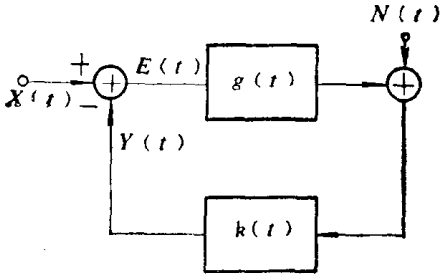
4—33　把具有功率谱密度$S_X(\omega)$的平稳随机信号$X(t)$输入到系统$h(t)$上，得输出$Y(t)$。设$h(t)$与$S_X(\omega)$存在高阶导数，当$|\tau|>\varepsilon$时，$R_X(\tau)=0$及ε充分小，试证

$$R_{YX}(\tau)\approx S_X(0)h(\tau)-\frac{\ddot{S}_X(0)\ddot{h}(\tau)}{2}$$

4—34　设线性系统的传递函数为$H(\omega)$，其输入随机信号$X(t)$是宽平稳的，输出为$Y(t)$，试证：

$$S_X(\omega)S_Y(\omega) = S_{XY}(\omega)S_{YX}(\omega)$$

4—35　线性系统如图题4—35所示。$X(t)$是输入随机信号，$N(t)$是干扰噪声，二者各自宽平稳和联合平稳。试求$R_Y(\tau)$、$S_Y(\omega)$、$R_E(\tau)$和$S_E(\omega)$。

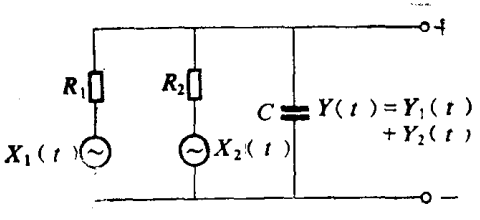


图题 4—35

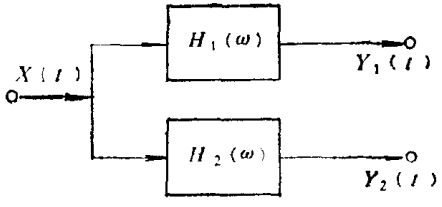
4—36　两个正交、各自平稳且联合平稳的随机信号$X_1(t)$和$X_2(t)$作用于图题4—36所示的电路，输出$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t)$，其中$Y_1(t)$和$Y_2(t)$分别为$X_1(t)$和$X_2(t)$的响应。试证：

（1）$Y_1(t)$和$Y_2(t)$也是正交、联合平稳的随机信号；

（2）$R_Y(\tau) = R_{Y_1}(\tau) + R_{Y_2}(\tau)$。



图题 4—36



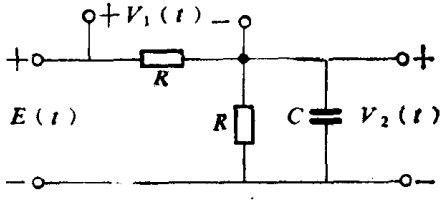
图题 4—37

4—37　某单输入、双输出的线性系统如图题 4—37 所示。若$X(t)$宽平稳，求证$Y_1(t)$和$Y_2(t)$的互谱密度为

$$S_{Y_1Y_2}(\omega) = H_1^*(\omega)H_2(\omega)S_X(\omega)$$

4—38 在题4—37中，若$X(t)$是零均值高斯过程，求使输出$Y_1(t)$和$Y_2(t)$相互统计独立的$H_1(\omega)$和$H_2(\omega)$应满足的条件，并画草图说明。

4—39 电路如图题4—39所示。输入$E(t)$是自相关函数$R_E(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$的平稳随机电报信号，试求$S_{V_1}(\omega)$、$S_{V_2}(\omega)$和$S_{V_1V_2}(\omega)$。



图题 4—39

4—40 已知n阶无重极点线性时不变稳定系统的输入为白噪声，其功率谱密度为$1V^2/Hz$，试分别用时域分析法和频域分析法证明系统输出的自相关函数为

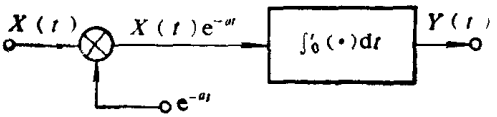
$$R_Y(\tau) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{r_i r_k}{s_i + s_k}e^{-s_i|\tau|}$$

式中s_i为系统的第i个极点，r_i为对应s_i的留数。

4—41 自相关函数为$R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$的平稳随机信号$X(t)$，在$t=0$时刻加到传递函数$H(s) = s^{-1}$的零初始条件的积分器上，求积分器输出$Y(t)$的均方值。

4—42 在题4—41中，若$R_X(\tau) = \delta(\tau)$，试求积分器输出$Y(t)$的自相关函数。

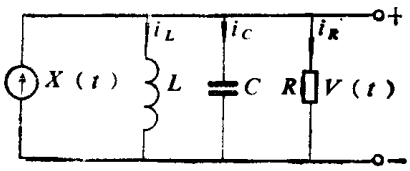
4—43 若题4—41中的$X(t)$，在$t=0$时刻加到图题4—43所示的系统的输入端，初始值为零，$\alpha(=\beta)$是常数，求输出的自相关函数。



图题 4—43

4—44 设并联电路如图题4—44所示。$X(t)$代表噪声电流，它是功率谱密度为S_0的白噪声。若在$t=0$时刻电路开始工作，初始条件$i_L(0) = 0$、

$V(0)=0$，试求$\sigma^2_{i_L}(t)$、$\sigma^2_{i_R}(t)$和$E[i_L(t)i_R(t)]$；若$t\to+\infty$，它们的结果为何？



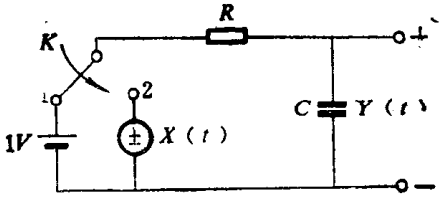
图题 4—44

4—45 已知线性系统的微分方程为

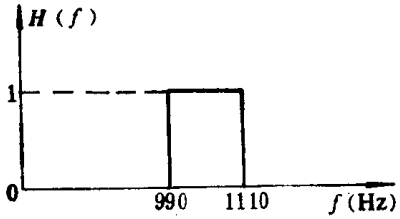
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\xi p\frac{dy(t)}{dt}+p^2y(t)=x(t)$$

设初始条件$Y(0)=y_0$、$\dot{Y}(0)=\dot{y}_0$为随机变量，其统计特性m_{y_0}、$m_{\dot{y}_0}$、$E[y_0^2]$、$E[\dot{y}_0^2]$和$R_{y_0\dot{y}_0}$已知，试求当$X(t)=0$时的$m_Y(t)$、$R_Y(t_1,t_2)$和$E[Y^2(t)]$。

4—46 电路如图题4—46所示。在$t<0$时，开关K接在“1”处，电路处于稳态；在$t=0$时刻开关K接在“2”处。$X(t)$是功率谱密度为$1V^2/Hz$的白噪声。试求$E[Y(t)]$、$R_Y(t_1,t_2)$和均方值$E[Y^2(t)]$；若$t\to+\infty$，问它们的结果为何？



图题 4—46



图题 4—47

4—47 设某带通滤波器的频率响应如图题4—47所示。输入为$s(t)+N(t)$。其中

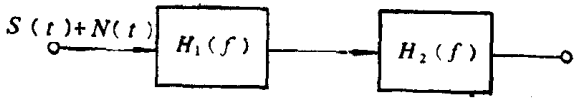
$$s(t) = 5\cos(2\pi \times 10^3 t) + 10\cos(2\pi \times 1100t) \quad (\text{V})$$

$N(t)$是功率谱密度为 $0.05\text{V}^2/\text{Hz}$ 的白噪声。试求该滤波器输出的信噪比。

4—48　线性系统如图题4—48所示。

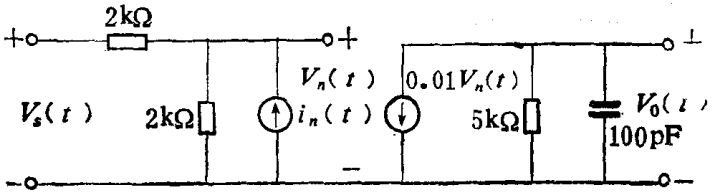
$$|H_1(f)| = \begin{cases} 1, & |f| \geqslant 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad |H_2(f)| = \begin{cases} 1, & 0.9 \leqslant |f| \leqslant 1.1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$s(t) = 20\cos 2\pi t$ V，$N(t)$是功率谱密度 $S_N(f) = e^{-3|f|}$的平稳噪声，试求第一、二个系统各自输出的信噪比。



图题 4—48

4—49　图题4—49所示的电路是单级晶体三极管放大等效电路，它含有一个三极管内部噪声源。输入信号$V_s(t) = 0.1\cos 2000\pi t$ V，$i_n(t)$为晶体管内部等效噪声，它是功率谱密度为$2 \times 10^{-16}\text{A}^2/\text{Hz}$的白噪声。试求输出的信噪比。



图题 4—49

4—50　设$X(n)$是一个均值为零、方差为σ_X^2的白噪声，$Y(n)$是单位冲激响应为$h(n)$的线性时不变离散系统的输出，试证：（1）$E[X(n)Y(n)] = h(0)\sigma_X^2$；（2）$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n)$。

4—51　单位冲激响应为

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \dfrac{\sin^2(n\pi/2)}{n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

的线性系统，受到平稳离散时间随机信号$X(n)$的激励。已知$X(n)$的自相关函数为$R_X(m)$，记系统的输出为$Y(n)$。

（1）试求$R_Y(m)$；　（2）试证：$R_{XY}(m) = -R_{XY}(-m)$

4—52　令均值为零、方差为σ_X^2的白噪声在$n=0$时刻作用到单位冲激响应为$h(n)$的系统的输入端，输出为$Y(n)$。

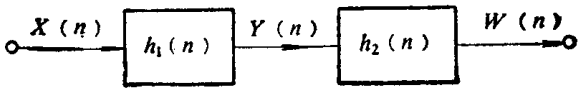
（1）推导出$E[Y(n)]$的表达式；

（2）推导出输出自相关函数$R_Y(n_1,n_2)$的表达式；

（3）证明：n很大时，(1)和（2）中的公式与双侧信号输入时的结果相近；

（4）假设$h(n)=a^nU(n)(|a|<1)$，求输出的均值和均方值，并图示它们。

4—53　图题4—53所示的系统，受均值为零、方差为σ_X^2的白噪声序列的激励，其中$h_1(n)=a^nU(n)$，$h_2(n)=b^nU(n)$及$|a|<1$和$|b|<1$。试求σ_W^2。



图题 4—53

4—54　设$X(n)$是均值为m_X、方差为σ_X^2的独立同分布的随机信号，$Y(n)$是$X(n)$作用于单位脉冲响应$h(n)=\delta(n)+r\delta(n-1)$的滤波器的输出。

（1）若$X(n)$是双侧的，试求$E[Y(n)]$、$R_Y(n,n+m)$，并问$Y(n)$是否严平稳？

（2）若$X(n)$是单侧的，计算$E[Y(n)]$、$R_Y(n,n+m)$，并求$n\to+\infty$时的$E[Y(n)]$和$R_Y(n,n+m)$。

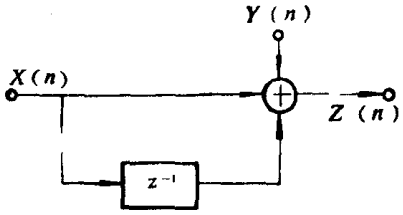
4—55　设某离散线性系统的输出

$$Y(n)=\frac{1}{3}[X(n+1)+X(n)+X(n-1)]$$

式中$X(n)$是功率谱密度为$S_X'(e^{j\omega})$的双侧平稳随机信号，试证明：系统输出的功率谱密度为

$$S_Y'(e^{j\omega})=\left|\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\omega\right|^2 S_X'(e^{j\omega})$$

4—56　电路如图题4—56所示。输入$X(n)$是独立同分布的随机信号，它的一维概率密度$f_X(x)=e^{-x}U(x)$，$Y(n)$是独立同分布的干扰噪声，其一维概率密度$f_Y(y)=2e^{-2y}U(y)$，并且$X(n)$和$Y(n)$是相互独立的双侧随机信号，试求$E[Z(n)]$、$R_Z(m)$。



图题 4—56

4—57 设$X(n)$和$Z(n)$分别是零均值独立同分布的双侧高斯随机信号，并且$X(n)$与$Z(n)$是相互独立的，它们的自相关函数分别是

$$R_X(m)=\sigma_X^2\delta(m) \qquad R_Z(m)=\sigma_Z^2\delta(m)$$

现用这两个随机信号构造如下的新随机信号：

$$Y(n)=Z(n)+rY(n-1)$$

$$U(n)=X(n)+Y(n)$$

$$W(n)=U(n)-rU(n-1)$$

试求：（1）$U(n)$和$W(n)$各自的协方差函数及功率谱密度；(2)$E[(X(n)-W(n))^2]$。

4—58 设平稳双侧随机信号$X(n)$激励传递函数为

$$H(z)=a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Mz^{-M}$$

的滤波器，试证输出$Y(n)$的平均功率为

$$E[Y^2(n)]=a^TR_Xa$$

其中 $a=[a_0\ a_1\ \cdots\ a_M]^T$；$R_X$是$X(n)$的$(M+1)$阶自相关函数矩阵，其第$i$行第$j$列的元素为$R_X(i,j)=E[X(i)X(j)]=R_X(j-i)$。

4—59 设一线性滤波器的传递函数为

$$H(z)=\frac{1-a^2}{1+a^2z^{-2}}$$

若输入双侧随机信号$X(n)$是自相关函数$R_X(m)=\sigma_X^2\delta(m)$的白噪声，试求输出$Y(n)$的平均功率。

4—60 设离散系统的单位冲激响应$h(n)=na^{-n}U(n)$，$a>1$，该系统输入的自相关函数为$R_X(m)=\sigma_X^2\delta(m)$的白噪声，试求系统输出$Y(n)$的自相关函数和功率谱密度。

4—61 设有二阶自回归模型

$$Y(n)=X(n)+b_1Y(n-1)+b_2Y(n-2)$$

$X(n)$是方差为σ_X^2的白噪声，并且$|b_1\pm\sqrt{b_1^2+4b_2}|<2$。

（1）证明$Y(n)$的功率谱密度为

$$S_Y(\omega)=S'_Y(e^{j\omega})=\sigma_x^2[1+b_1^2+b_2^2-2b_1(1-b_2)\cos\omega-2b_2\cos2\omega]^{-1}$$

（2）求$Y(n)$的自相关函数；

（3）写出Yule-Walker方程。

4—62 设$S'_X(z)=\sigma_x^2$，试计算二阶滑动平均(MA)模型

$$Y(n)=X(n)+a_1X(n-1)+a_2X(n-2)$$

的自相关函数和功率谱密度。

4—63 设计一个稳定的线性系统，当其输入随机信号的功率谱密度为$S_X(s)$时，输出的功率谱密度为$S_Y(s)$。其中$S_X(s)$和$S_Y(s)$都是有理函数。

4—64 求三个最小相位系统，使其在单位谱密度白噪声激励下的输出谱密度分别是

（1）$S(\omega)=\dfrac{1}{\omega^4+1}$

（2）$S(\omega)=\dfrac{3}{\omega^4-\omega^2+1}$

（3）$S(\omega)=\dfrac{\omega^4-64}{\omega^4+10\omega^2+9}$

4—65 求一稳定系统，使其在单位谱密度白噪声激励下的输出自相关函数为

$$R_Y(m)=(0.5)^{|m|}+(-0.5)^{|m|},\quad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

4—66 求功率谱密度为

$$S_X(\omega)=\frac{\omega^2+3}{\omega^2+8}$$

的白化滤波器。

4—67 求功率谱密度为

$$S_X(\omega)=S'_X(e^{j\omega})=\frac{1.09+0.6\cos\omega}{1.16+0.8\cos\omega}$$

的白化滤波器。

4—68 设线性系统的单位冲激响应如图题 4—68所示。

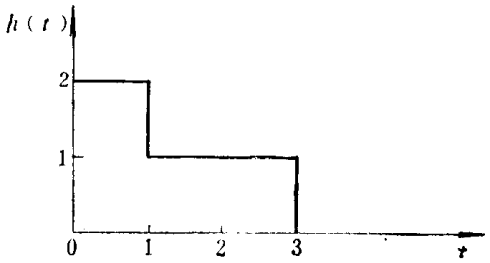
（1）求该系统的等效噪声带宽；

（2）若输入是功率谱密度为$2V^2/Hz$的白噪声，求系统输出的平均功率。

4—69 求单位冲激响应为

$$h(t)=(1-t)[U(t)-U(t-1)]$$

系统的等效噪声带宽。



图题 4—68

4—70 求下列两个滤波器的等效噪声带宽。

（1）同步滤波器 $H(s)=\dfrac{a^n}{(s+a)^n}$；

（2）切比雪夫滤波器 $|H(j\omega)|=[1+\varepsilon^2C_n^2(\omega)]^{-1/2}$

式中 $C_n(\omega)=\begin{cases}\cos(n\arccos\omega), & |\omega|\leqslant 1\\ \mathrm{ch}(n\,\mathrm{arc\,ch}\omega), & |\omega|\geqslant 1\end{cases}$；$0<\varepsilon<1$。

4—71 n阶巴特沃斯滤波器的频率响应

$$H(\omega)=\left[1+\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right)^{2n}\right]^{-1/2}$$

试证其等效噪声带宽为

$$\Delta\omega_e=\frac{\pi\cdot\Delta\omega}{2n\sin(\pi/2n)}$$

4—72 求题4—59系统的等效噪声带宽。

4—73 功率谱密度为$N_0/2$的白噪声作用于$|H(0)|=2$的低通网络上，其等效噪声带宽是2MHz。若1Ω电阻上的输出平均功率是0.1W，求N_0的值。

4—74 设有一零均值平稳随机信号$X(t)$，其自相关函数是$R_X(\tau)$、功率谱密度为$S_X(\omega)$且$S_X(\omega)\leqslant S_X(0)$。若线性低通滤波器$H(\omega)$受$X(t)$激励的响应为$Y(t)$，且$H(\omega)$的3dB带宽小于$X(t)$的等效噪声带宽。试证：

（1）$\tau_X B_X=\tau_Y B_Y$

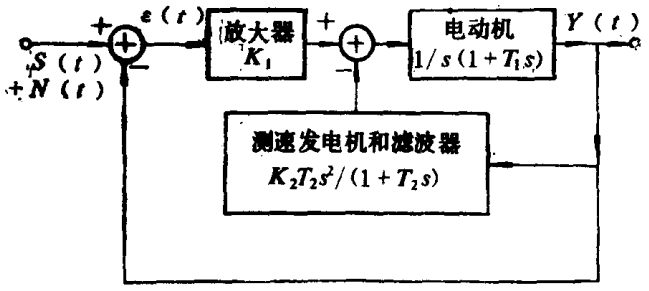
式中τ_X、τ_Y和B_X、B_Y分别为$H(\omega)$的输入端、输出端随机信号的相关时间和等效噪声带宽。$\left(\text{相关时间定义为}\tau_0=\int_0^\infty r(\tau)\,d\tau\right)$

（2）$\dfrac{\tau_Y}{\tau_X}=\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}|H(0)|^2$

式中σ_X^2、σ_Y^2分别为输入、输出随机信号的方差。

4—75 一个带有测速发电机反馈的比例式随动系统如图题4—75所示。其输入由具有自相关函数为$R_S(\tau)=Ae^{-\alpha|\tau|}$的平稳随机信号$S(t)$以及

一个叠加的白噪声$N(t)$所组成，$N(t)$与$S(t)$统计独立。该随动系统的输出不能跟随输入的均方误差为$E[e^2(t)]$，若令放大器与测速发电机的增益K_1和K_2为无限大，而K_1/K_2保持为一常数，试证明该均方误差与电动机时间常数T_1无关。

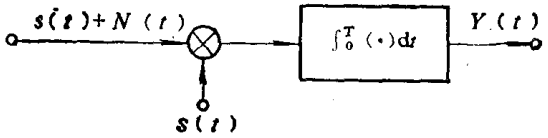


图题 4—75

4—76 在图题4—76所示的接收机中，噪声$N(t)$是均值为零、自相关函数为$R_N(\tau)=\sigma_N^2 e^{-\alpha|\tau|}$的高斯过程。$s(t)$是一确定性的信号

$$s(t)=\sin^2\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)[U(t)-U(t-T)]$$

试求接收机输出$Y(t)$的一维概率密度表达式。

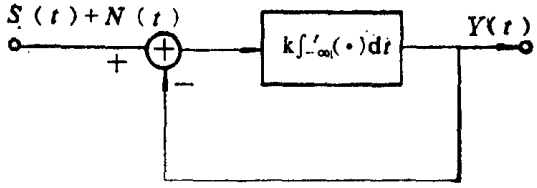


图题 4—76

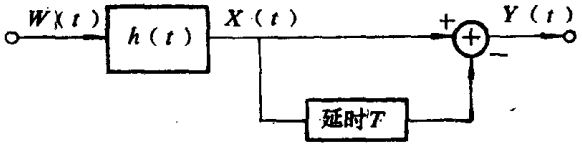
4—77 设$Y(t)$是高斯随机信号$X(t)$通过线性时不变系统的响应，试证$X(t)$和$Y(t)$是联合高斯分布的。

4—78 设某线性系统的单位冲激响应为$h(t)$，其输入$X(t)$是均值为零、自相关函数$R_X(\tau)=\delta(\tau)$的平稳高斯噪声。求使$X(t_1)$和输出$Y(t_1)$统计独立的$h(t)$应具备的充要条件。

4—79 某反馈系统如图题4—79所示。$S(t)$是均值为零、自相关函数$R_S(\tau)=\sigma_S^2 e^{-\alpha|\tau|}$的高斯过程，$N(t)$是功率谱密度为$N_0/2$的高斯白噪声，$S(t)$与$N(t)$统计独立。求$S(t_1)$和$Y(t_1)$的联合概率密度$f_{SY}(s,y;t_1,t_1)$。



图题 4—79



图题 4—80

4—80 图题4—80所示的系统的输入$W(t)$是零均值、功率谱密度为$N_0/2$的白噪声，$h(t)=e^{-\alpha t}U(t)$，试求输出$Y(t)$的一维概率密度。

4—81 设有线性微分方程

$$\frac{dY(t)}{dt}+Y(t)=X(t)$$

若输入$X(t)$是功率谱密度$S_X(\omega)=1$的白噪声；$Y(0)=Y_0$是均值为零、方差为1的高斯变量，且Y_0与$X(t)$统计独立。求：

（1）$Y(t)$的一维概率密度$f_Y(y;t)$，$t>0$；

（2）$Y(t)$的二维概率密度$f_Y(y_1,y_2;t_1,t_2)$，t_1、$t_2>0$；

（3）条件概率密度$f_{Y_2}(y_2,t_2|Y(t_1)=y_1)$，$t_2>t_1$。

4—82 设一线性系统的单位冲激响应$h(t)=e^{-\beta t}U(t)$，$\beta>0$，其输入$X(t)$是均值为零、自相关函数$R_X(\tau)=\sigma_X^2e^{-\alpha|\tau|}$ $(\alpha>0,\ \alpha\neq\beta)$的平稳高斯过程。如果$X(t)$是双侧的，输出为$Y(t)$，

（1）求$P\{Y(0)>y\}$；

（2）如果在$t=-T$时刻$X(-T)=0$，求$Y(0)>y$的条件概率$P\{Y(0)>y|X(-T)=0\}$，$T>0$；

（3）如果在$t=T$时观察到$X(T)=0$，求$P\{Y(0)>y|X(T)=0\}$。

4—83 在题4—59中，若$X(n)$是高斯白噪声，试求输出$Y(t)$的一维概率密度。

4—84 设白噪声通过离散系统$H(e^{j\omega})$后的功率谱密度为$S_Y(e^{j\omega})$，其

形状不再是一条平坦的直线。我们定义一个量

$$r_Y^2=\frac{\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln S_Y'(e^{j\omega})\,d\omega\right]}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_Y'(e^{j\omega})\,d\omega}=\frac{\gamma_Y^2}{\sigma_Y^2}$$

来衡量$S_Y'(e^{j\omega})$的平坦程度，称r_Y^2为谱平坦度量因子(Spectral flatness measure)。它是一个简单的数值。这样我们可以把r_Y^2作为描述一个功率谱形状的重要参数。此外，r_Y^2和r_Y^{-2}在信源编码、波形预测等方面起着重要的作用。

（1）若$S_Y'(e^{j\omega})=\sigma_Y^2$，证明$r_Y^2=1$；

（2）证明$0\leqslant r_Y^2\leqslant 1$；

（3）若$Y(n)-aY(n-1)=X(n)$，$R_X(m)=\sigma_X^2\delta(m)$，证明$r_Y^2=1-a^2$；

（4）在题4—61中，证明$r_Y^2=(1-b_2)\quad(1+b_2)\ (1-b\quad b_2)(1+b\ b_2)$；

（5）在题4—62中，证明$r_Y^2=(1+a_1^2+a_2^2)^{-1}$；

（6）若系统的传递函数$H(s)$是有理函数，其输入白噪声的方差为σ_X^2，输出的方差为σ_Y^2，证明$r_Y^2=\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$；

（7）对于连续时间平稳随机过程$Y(t)$，若其功率谱密度在$(-\Omega,\Omega)$上是限带的，证明其谱平坦度量因子为

$$r_Y^2=\frac{\frac{\Omega}{\pi}\exp\left[\frac{1}{2\Omega}\int_{-\infty}^{\infty}\ln S_Y(\omega)\,d\omega\right]}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_Y(\omega)\,d\omega}$$

第五章　窄带随机过程

Ⅰ．本章要点

窄带随机过程是在雷达、通信、声纳等电子系统中经常遇到的一种重要的随机信号。在教材里，本章主要用希尔伯特变换研究窄带随机过程。通过引入解析过程，证明了窄带随机过程的两种数学表示式——莱斯（Rice）表示式和准正弦振荡表示式。根据莱斯表示式，研究了两个正交分量$a(t)$与$b(t)$的相关函数、功率谱密度等统计特性；根据准正弦振荡表示式，研究了窄带高斯随机过程包络和相位的概率分布。

本章的重点及其要求：（1）弄清窄带随机过程的特点和工程意义；（2）熟练掌握莱斯表示式和准正弦振荡表示式，并能灵活运用$a(t)$、$b(t)$的统计特性解决问题；（3）结合包络检波器、包络平方律检波器和相位检波器，掌握窄带高斯随机过程包络和相位的概率分布。

Ⅱ．基本内容与例解

一、希尔伯特变换、解析信号与解析过程

（一）希尔伯特变换

关于希尔伯特变换，读者应掌握两点：一是希尔伯特变换是一种线性变换，因此把它作为一个线性系统来处理；二是希尔伯特变换的求解方法。其求解方法有时域法和频域法两种。

时域法是从希尔伯特变换的定义出发，按求解卷积积分的方

法来求解。即若$s(t)$是定义在区间$(-\infty<t<\infty)$内的实函数，则其希尔伯特变换按下列公式求解

$$\hat{s}(t)=H[s(t)]=s(t)*\frac{1}{\pi t}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau \tag{5.1}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(t+\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau \tag{5.2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(t-\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau \tag{5.3}$$

希尔伯特的反变换为

$$s(t)=H^{-1}[\hat{s}(t)]=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{s}(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau \tag{5.4}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{s}(t-\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau \tag{5.5}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{s}(t+\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau \tag{5.6}$$

频域法是先求出实函数$s(t)$的傅里叶变换$S(\omega)$，再求出$\hat{s}(t)$的傅里叶变换$\hat{S}(\omega)$，即

$$\hat{S}(\omega)=-\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\omega)S(\omega) \tag{5.7}$$

式中

$$\mathrm{sgn}(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\geqslant 0\\ -1, & \omega<0\end{cases} \tag{5.8}$$

然后求$\hat{S}(\omega)$的傅里叶反变换得$\hat{s}(t)$。

求解希尔伯特变换的例子，请参看本节例解中的例5.1和例5.2。

（二）解析信号与解析过程

1．解析信号　任意实确定信号$s(t)$的解析信号定义为

$$\tilde{s}(t)=s(t)+\mathrm{j}\hat{s}(t) \tag{5.9}$$

或称$\tilde{s}(t)$为$s(t)$的预包络。

读者在学习解析信号时，应弄清四个问题：一是为什么要定义解析信号？二是解析信号与实信号 $s(t)$ 在频谱、包络、相位方面有何关系？三是实信号的复数表示方法有几种？最后是预包络、复包络、包络、复载频的概念。

2．解析过程及其性质　对于任意实随机过程 $X(t)$，称

$$\tilde{X}(t)=X(t)+\mathrm{j}\hat{X}(t) \tag{5.10}$$

为 $X(t)$ 的解析表达式，或解析过程。式中 $\hat{X}(t)$ 是 $X(t)$ 的希尔伯特变换。

解析过程是复随机过程，因此可用分析复随机过程统计特性的方法研究它。解析过程的引入，是为了推导随机过程的莱斯表示式。对于解析过程，我们关心的是：它的实部和虚部各自的自相关函数与功率谱密度及其二者之间的关系，实部与虚部之间的互相关函数与互功率谱密度、解析过程与原实过程自相关函数之间的关系及功率谱密度之间的关系。为此，应掌握解析过程的以下性质：

（1）若 $X(t)$ 为宽平稳过程，则 $\hat{X}(t)$ 也是宽平稳过程，且 $X(t)$ 与 $\hat{X}(t)$ 联合宽平稳。

$$（2）\ \hat{\hat{X}}(t)=-X(t) \tag{5.11}$$

$$（3）\ R_{\hat{X}}(\tau)=R_X(\tau),\ S_{\hat{X}}(\omega)=S_X(\omega) \tag{5.12}$$

$$（4）\ R_{\hat{X}X}(\tau)=-\hat{R}_X(\tau),\ R_{X\hat{X}}(\tau)=\hat{R}_X(\tau) \tag{5.13}$$

$$（5）\ R_{X\hat{X}}(\tau)=-R_{\hat{X}X}(\tau) \tag{5.14}$$

$$（6）\ R_{\hat{X}X}(-\tau)=-R_{\hat{X}X}(\tau) \tag{5.15}$$

$$（7）\ R_{\hat{X}X}(0)=0 \tag{5.16}$$

$$（8）\ R_{\tilde{X}}(\tau)=2[R_X(\tau)+\mathrm{j}R_{X\hat{X}}(\tau)] \tag{5.17}$$

$$（9）\ S_{X\hat{X}}(\omega)=-\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\omega)S_X(\omega) \tag{5.18}$$

$$（10）\ S_{\tilde{X}}(\omega)=4S_X(\omega)U(\omega) \tag{5.19}$$

式中 $U(\cdot)$ 为单位阶跃函数。

（三）例解

〔例5.1〕 已知 $s(t)=A\mathrm{rect}(t/T)$，求 $\hat{s}(t)$。

解： 根据式（5.1）得

$$\hat{s}(t)=\frac{A}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}(\tau/T)[t-\tau]^{-1}\mathrm{d}\tau=\frac{A}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2}(t-\tau)^{-1}\mathrm{d}\tau$$

$$=-\frac{A}{\pi}\ln|t-\tau|\Big|_{-T/2}^{T/2}=\frac{A}{\pi}\ln\left|\frac{t+T/2}{t-T/2}\right|$$

〔例5.2〕 设低频信号$a(t)$的频谱为

$$A(\omega)=\begin{cases}A(\omega), & |\omega|<\Delta\omega/2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

证明当$\omega_0>\Delta\omega/2$时，有

$$H[a(t)\cos\omega_0 t]=a(t)\sin\omega_0 t$$

$$H[a(t)\sin\omega_0 t]=-a(t)\cos\omega_0 t$$

证明：设$s(t)=a(t)\cos\omega_0 t$，其频谱

$$S(\omega)=\frac{1}{2}[A(\omega-\omega_0)+A(\omega+\omega_0)]$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}A(\omega-\omega_0), & \omega\geqslant 0\\ \frac{1}{2}A(\omega+\omega_0), & \omega<0\end{cases}$$

则有

$$\hat{S}(\omega)=-\mathrm{jsgn}(\omega)S(\omega)=\begin{cases}-\frac{\mathrm{j}}{2}A(\omega-\omega_0), & \omega\geqslant 0\\ \frac{\mathrm{j}}{2}A(\omega+\omega_0), & \omega<0\end{cases}$$

$$=\frac{\mathrm{j}}{2}[A(\omega+\omega_0)-A(\omega-\omega_0)]$$

求$\hat{S}(\omega)$的傅里叶反变换得

$$\hat{s}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{S}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{\mathrm{j}a(t)}{2}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}]$$

$$=a(t)\sin\omega_0 t$$

同理得

$$H[a(t)\sin\omega_0 t]=-a(t)\cos\omega_0 t$$

〔例5.3〕 若高频窄带随机过程的解析过程可近似用指数复过程表示成

$$\tilde{X}(t)=r(t)e^{j\omega_0 t}$$

其中$r(t)$称为窄带过程的复包络。求复包络的功率谱密度。

解：复包络的自相关函数

$$\begin{aligned}R_r(\tau)&=E[r^*(t)r(t+\tau)]\\&=E[\tilde{X}^*(t)e^{j\omega_0 t}\cdot\tilde{X}(t+\tau)e^{-j\omega_0(t+\tau)}]\\&=E[\tilde{X}^*(t)\tilde{X}(t+\tau)]e^{-j\omega_0\tau}=R_{\tilde{X}}(\tau)e^{-j\omega_0\tau}\end{aligned}$$

应用傅里叶变换的频移特性，不难得到复包络的功率谱密度为

$$S_r(\omega)=S_{\tilde{X}}(\omega+\omega_0)$$

考虑到

$$S_{\tilde{X}}(\omega)=4S_X(\omega)U(\omega)$$

则有

$$S_r(\omega)=4S_X(\omega+\omega_0)U(\omega+\omega_0)$$

〔例5.4〕 设式（5.10）中的$X(t)$为零均值、σ_X^2方差的实平稳高斯噪声，若记解析过程$\tilde{X}(t)$的包络和相位分别为

$$A(t)=[X^2(t)+\hat{X}^2(t)]^{1/2}$$

$$\Phi(t)=\operatorname{arctg}\frac{\hat{X}(t)}{X(t)}$$

试求：（1）$A(t)$和$\Phi(t)$各自的一维概率密度$f_A(a)$和$f_\Phi(\varphi)$。（2）$A^2(t)$的自相关函数。

解：在解题之前，先对该问题作一简要的分析。根据题意，$A(t)$、$\Phi(t)$是$X(t)$和$\hat{X}(t)$的函数，因此，利用第一章随机变量函数概率密度的求取方法，只要求得$X(t)$与$\hat{X}(t)$在同一时刻的联合概率密度及雅可比因子，就能得到$A(t)$和$\Phi(t)$在同一时刻的联合概率密度。在此基础上，求$A(t)$、$\Phi(t)$的边沿概率密度即得所求。另外，$A^2(t)$的自相关函数求取从自相关函数的定义出发即可。下面具体求之。

（1）求 $X(t)$与$\hat{X}(t)$ 在同一时刻的联合概率密度。因为希尔伯特变换是线性变换，所以零均值高斯噪声 $X(t)$ 的希尔伯特变换$\hat{X}(t)$ 也是零均值的高斯噪声，且二者是联合高斯的。根据式（5.12），$\hat{X}(t)$的方差亦为σ_X^2。于是，$X(t)$ 和 $\hat{X}(t)$ 的一维概率密度分别为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X}\exp(-x^2/2\sigma_X^2)$$

$$f_{\hat{X}}(\hat{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X}\exp(-\hat{x}^2/2\sigma_X^2)$$

又因$X(t)$与$\hat{X}(t)$在同一时刻是正交的（见式（5.16）），且它们均为零均值，所以$X(t)$与$\hat{X}(t)$ 在同一时刻不相关，从而它们在同一时刻也是统计独立的，则

$$f_{X\hat{X}}(x,\hat{x})=f_X(x)f_{\hat{X}}(\hat{x})=(2\pi\sigma_X^2)^{-1}\exp[-(x^2+\hat{x}^2)/2\sigma_X^2]$$

求雅可比因子。根据$A(t)$、$\Phi(t)$与$X(t)$和$\hat{X}(t)$ 的关系式，$A(t)$和$\Phi(t)$的反函数为

$$X(t)=A(t)\cos\Phi(t)$$

$$\hat{X}(t)=A(t)\sin\Phi(t)$$

记同一时刻取值关系为

$$x=a\cos\varphi$$

$$\hat{x}=a\sin\varphi$$

则雅可比因子为

$$J=\frac{\partial(x,\hat{x})}{\partial(a,\varphi)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial\hat{x}}{\partial a} & \dfrac{\partial\hat{x}}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -a\sin\varphi\\ \sin\varphi & a\cos\varphi\end{vmatrix}=a$$

于是$A(t)$与$\Phi(t)$在同一时刻的二维联合概率密度为

$$f_{A\Phi}(a,\varphi)=|J|f_{X\hat{X}}(x,\hat{x})$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a}{2\pi\sigma_X^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma_X^2}}, & a\geqslant 0\text{及}0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

最后

$$f_A(a)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{A\Phi}(a,\varphi)\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{a}{2\pi\sigma_X^2}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2\sigma_X^2}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{a}{\sigma_X^2}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2\sigma_X^2}}\cdot U(a)$$

$$f_\Phi(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{A\Phi}(a,\varphi)\mathrm{d}a=\int_0^{\infty}\frac{a}{2\pi\sigma_X^2}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2\sigma_X^2}}\mathrm{d}a$$

$$=\frac{1}{2\pi}\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$

显然

$$f_{A\Phi}(a,\varphi)=f_A(a)f_\Phi(\varphi)$$

即$A(t)$和$\Phi(t)$在同一时刻统计独立，并且，$A(t)$的一维概率密度为瑞利分布、$\Phi(t)$的一维概率密度为均匀分布。

作为一个更一般的问题见习题5—8。通过对本例题和习题5-8的求解，读者将会看到，后面关于窄带高斯随机信号的包络和相位的概率密度问题，是这两个问题的特例。

（2） 令$Q(t)=A^2(t)$，则

$$R_Q(t,t+\tau)=E[Q(t)Q(t+\tau)]=E[A^2(t)A^2(t+\tau)]$$

$$=E[(X^2(t)+\hat{X}^2(t))(X^2(t+\tau)+\hat{X}^2(t+\tau))]$$

$$=E[X^2(t)X^2(t+\tau)]+E[\hat{X}^2(t)X^2(t+\tau)]$$

$$+E[X^2(t)\hat{X}^2(t+\tau)]+E[\hat{X}^2(t)\hat{X}^2(t+\tau)]$$

因为$X(t)$平稳，所以$\hat{X}(t)$也是平稳的，且二者联合平稳，则

$$R_X(t,t+\tau)=R_X(\tau),\quad R_X^{\wedge}(t,t+\tau)=R_X^{\wedge}(\tau)$$

$$R_{X\hat{X}}^{\wedge}(t,t+\tau)=R_{X\hat{X}}^{\wedge}(\tau),\quad R_{\hat{X}X}^{\wedge}(t,t+\tau)=R_{\hat{X}X}^{\wedge}(\tau)$$

又因$X(t)$与$\hat{X}(t)$是联合高斯的，则根据零均值高斯随机变量的四阶矩公式

$$E[X_1X_2X_3X_4]=E[X_1X_2]E[X_3X_4]+E[X_1X_3]E[X_2X_4]$$

$$+E[X_1X_4]E[X_2X_3]$$

有

$$E[X^2(t)X^2(t+\tau)]=R_X^2(0)+2R_X^2(\tau)$$

$$E[\hat{X}^2(t)\hat{X}^2(t+\tau)]=R_X^{2\wedge}(0)+2R_X^{2\wedge}(\tau)$$

$$E[\hat{X}^2(t)X^2(t+\tau)]=R_X^{\wedge}(0)R_X(0)+2R_{XX}^{2\wedge}(\tau)$$

$$E[X^2(t)\hat{X}^2(t+\tau)]=R_X(0)R_X^{\wedge}(0)+2R_{XX}^{2\wedge}(\tau)$$

考虑到式（5.12）和式（5.14），最后得

$$R_Q(\tau)=R_Q(t,t+\tau)=4[R_X^2(0)+R_X^2(\tau)+\hat{R}_X^2(\tau)]$$

二、窄带随机过程

（一）窄带随机过程的定义及其表示方法

1．定义　一个实平稳随机过程$X(t)$，若其功率谱密度$S_X(\omega)$满足

$$S_X(\omega)=\begin{cases}S_X(\omega), & 0<\omega_0-\Omega\leqslant|\omega|\leqslant\omega_0-\Omega+\Delta\omega\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\tag{5.20}$$

而且，带宽$\Delta\omega$满足$\Delta\omega\ll\omega_0$。其中Ω、$\Delta\omega$为正实常数，ω_0为$S_X(\omega)$带宽内任一角频率。则称该过程为窄带平稳随机过程。

2．窄带过程的两种表示方法

（1）莱斯表示式

$$X(t)=a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t\tag{5.21}$$

式中

$$a(t)=X(t)\cos\omega_0 t+\hat{X}(t)\sin\omega_0 t\tag{5.22}$$

$$b(t)=-X(t)\sin\omega_0 t+\hat{X}(t)\cos\omega_0 t\tag{5.23}$$

（2）准正弦振荡表示式

$$X(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\varphi(t)]\tag{5.24}$$

式中

$$A(t)=[a^2(t)+b^2(t)]^{1/2}\tag{5.25}$$

$$\varphi(t)=\operatorname{arctg}[b(t)/a(t)]\tag{5.26}$$

$a(t)$、$b(t)$与$A(t)$、$\varphi(t)$的关系为

$$a(t)=A(t)\cos\varphi(t)\tag{5.27}$$

$$b(t)=A(t)\sin\varphi(t)\tag{5.28}$$

分别称$A(t)$、$\varphi(t)$为窄带随机过程$X(t)$的包络和相位。并且，$A(t)$、$\varphi(t)$、$a(t)$和$b(t)$都是慢变化的低频限带随机过程。

关于窄带随机过程，需强调三点：①它是按其功率谱密度的特点而定义，并未涉及它的概率密度；②式（5.21）、（5.24）对任一非窄带平稳随机过程也是适应的，只不过在非窄带的情况下，$A(t)$、$\varphi(t)$、$a(t)$、$b(t)$均不具有慢变化的特点；③窄带随机过程可以被看成是白噪声通过窄带系统的输出。工程上产生窄带随机过程的两种方法见后面例5.8。

（二）$a(t)$与$b(t)$的性质

1．性质　设$X(t)$是零均值、σ_X^2方差的平稳窄带随机过程，则有下列性质

（1）$a(t)$和$b(t)$都是实随机过程。

（2）$$E[a(t)]=E[b(t)]=0 \tag{5.29}$$

（3）$a(t)$与$b(t)$各自宽平稳且联合宽平稳。

（4）$$R_a(\tau)=R_b(\tau)=R_X(\tau)\cos\omega_0\tau+R_X\hat{X}(\tau)\sin\omega_0\tau \tag{5.30}$$

$$R_a(\tau)=R_b(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}S_X(\omega)\cos[(\omega-\omega_0)\tau]\mathrm{d}\omega \tag{5.31}$$

（5）$R_a(0)=R_b(0)=R_X(0)$或$\sigma_a^2=\sigma_b^2=\sigma_X^2$，说明$a(t)$、$b(t)$与$X(t)$具有相同的平均功率。 (5.32)

（6）$$R_{ab}(\tau)=-R_{ba}(\tau),\quad R_{ab}(\tau)=-R_{ab}(-\tau) \tag{5.33}$$

（7）$R_{ab}(0)=0$，$R_{ba}(0)=0$，即$a(t)$和$b(t)$在同一时刻正交。若窄带过程的功率谱密度对称于中心频率ω_0，则$R_{ab}(\tau)=0$，即$a(t)$与$b(t)$为正交过程。 (5.34)

（8）$$R_{ab}(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}S_X(\omega)\sin[(\omega-\omega_0)\tau]\mathrm{d}\omega \tag{5.35}$$

（9）$$S_a(\omega)=S_b(\omega)=\mathrm{Lp}[S_X(\omega-\omega_0)+S_X(\omega+\omega_0)] \tag{5.36}$$

（10）$$S_{ab}(\omega)=-S_{ba}(\omega)=\mathrm{jLp}[S_X(\omega-\omega_0)-S_X(\omega+\omega_0)] \tag{5.37}$$

（11）$$R_X(\tau)=R_a(\tau)\cos\omega_0\tau+R_{ba}(\tau)\sin\omega_0\tau \tag{5.38}$$

其中Lp〔$S(\omega)$〕表示取$S(\omega)$的低频部分。

(12) 若$X(t)$又服从高斯分布，则$a(t)$、$b(t)$也是零均值的高斯过程，且二者是联合高斯的，$a(t)$与$b(t)$在同一时刻是正交、不相关、独立的两个随机变量。若$S_X(\omega)$关于ω_0对称，则$a(t)$和$b(t)$是相互正交、不相关、独立的随机过程。

2．$S_a(\omega)$和$S_b(\omega)$的求取方法　根据式(5.36)，可用以下方法来构成$S_a(\omega)$和$S_b(\omega)$：

（1）把$S_X(\omega)$曲线正频率部分向左移ω_0，结果原来位于ω_0的那部分曲线，现在移到频率轴上的原点位置；

（2）把$S_X(\omega)$曲线的负频率部分向右移ω_0；

（3）把移位后的两条曲线加起来，其结果就是$S_a(\omega)$和$S_b(\omega)$。

如何由$S_X(\omega)$构成$S_{ab}(\omega)$和如何由$S_a(\omega)$或$S_b(\omega)$构成$S_X(\omega)$，请读者仿上面的方法给出。

（三）例解

〔**例5.5**〕 窄带随机过程能表示成准正弦振荡的另一种证明方法（已有的方法见参考书〔1〕）。设一理想窄带系统的频率特性为矩形，带宽为$\Delta\omega$，中心频率为ω_0，$\omega_0 \gg \Delta\omega$。试证白噪声通过该系统后的输出表达式为准正弦振荡。

证明：先把窄带系统的输出样本函数展成傅里叶级数，然后分析其频率成分。

白噪声通过该窄带系统后，输出为窄带随机过程。

（1）窄带系统输出样本函数的傅里叶级数表示。设窄带系统输出过程$X(t)$的样本函数集为$\{x_i(t)，i=1,2,\cdots\}$。我们规定观察时间间隔为$(-T/2，T/2)$，在此时间内，对于任何一个样本函数$x_k(t)$，可以用傅里叶级数展开为

$$x_k(t)=\sum_{m=0}^{\infty}(a_{km}\cos m\omega_1 t+b_{km}\sin m\omega_1 t) \qquad (5.39)$$

式中$\omega_1=2\pi/T$。令$\omega_m=m\omega_1$，式(5.39)变成

$$x_k(t)=\sum_{m=0}^{\infty}(a_{km}\cos\omega_m t+b_{km}\sin\omega_m t) \qquad (5.40)$$

式中

$$a_{k0}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_k(t)\mathrm{d}t$$

$$a_{km}=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_k(t)\cos\omega_m t\mathrm{d}t, \qquad (m\neq 0)$$

$$b_{km}=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x_k(t)\sin\omega_m t\mathrm{d}t$$

式（5.40）是对第 k 个样本函数 $x_k(t)$ 的傅里叶展开式。对于其它的样本函数，在相同的时间区间内，也可以用这一式子表示，只是系数 a_{k0}、a_{km}和b_{km} 的数值不同而已。因此，为了把在区间（$-T/2$，$T/2$）之内窄带随机过程的各个样本函数用统一的式子来表示，可以采用以下的形式

$$X(t)=\sum_{m=0}^{\infty}(A_m\cos\omega_m t+B_m\sin\omega_m t) \qquad (5.41)$$

式中用$X(t)$代替了 $x_k(t)$，可以表示任何一个样本函数；用A_m和B_m代替了a_{km}和b_{km}。对于某个样本函数来说，波形是确定的，所以，a_{km}和b_{km}是确定的。对于所有的样本函数来说，波形各不相同，因此A_m和B_m是不确定的，是随机变量。这是A_m和B_m与a_{km}和b_{km}之间的区别。可见式（5.41）就是窄带系统输出随机过程的表示式。

（2）$X(t)$的频率成分分析。现在把ω_m改写为

$$\omega_m=(\omega_m-\omega_0)+\omega_0$$

代入式（5.41），它的两个部分分别是

$$\begin{aligned}A_m\cos\omega_m t&=A_m\cos[(\omega_m-\omega_0)+\omega_0]t\\&=A_m[\cos(\omega_m-\omega_0)t\cdot\cos\omega_0 t-\sin(\omega_m-\\&\qquad\omega_0)t\cdot\sin\omega_0 t]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_m\sin\omega_m t&=B_m\sin[(\omega_m-\omega_0)+\omega_0]t\\&=B_m[\sin(\omega_m-\omega_0)t\cdot\cos\omega_0 t+\cos(\omega_m-\end{aligned}$$

$$\omega_0)t\cdot\sin\omega_0 t\Big]$$

令

$$A_1(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[A_m\cos(\omega_m-\omega_0)t+B_m\sin(\omega_m-\omega_0)t\right] \tag{5.42}$$

$$B_1(t)=-\sum_{m=0}^{\infty}\left[B_m\cos(\omega_m-\omega_0)t-A_m\sin(\omega_m-\omega_0)t\right] \tag{5.43}$$

则

$$X(t)=A_1(t)\cos\omega_0 t-B_1(t)\sin\omega_0 t \tag{5.44}$$

式（5.44）又可以进一步写成

$$X(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\varphi(t)] \tag{5.45}$$

$A(t)$和$\varphi(t)$与$A_1(t)$和$B_1(t)$的关系是

$$A(t)=[A_1^2(t)+B_1^2(t)]^{\frac{1}{2}} \tag{5.46}$$

$$\varphi(t)=\operatorname{arctg}\frac{B_1(t)}{A_1(t)} \tag{5.47}$$

$A_1(t)$和$B_1(t)$也可用$A(t)$和$\varphi(t)$来表示，即

$$A_1(t)=A(t)\cos\varphi(t)$$

$$B_1(t)=A(t)\sin\varphi(t)$$

在窄带系统中，由于其中心频率ω_0远大于其带宽$\Delta\omega$，即$\omega_0\gg\Delta\omega$，因此，虽然输入随机过程有很宽的频带，而输出随机过程的频带则取决于$\Delta\omega$的大小。输出能够保留下来的频率成分，只是在$\pm\omega_0$附近，处于（$\pm\omega_0-\Delta\omega/2$，$\pm\omega_0+\Delta\omega/2$）以内，在此以外的都被滤去，所以在式（5.42）和式（5.43）中，起作用的频率只有

$$|\omega_m-\omega_0|\leqslant\frac{1}{2}\Delta\omega$$

由此可知，$A_1(t)$和$B_1(t)$是按相当低的频率变化的，和$\cos\omega_0 t$相比较，$A_1(t)$和$B_1(t)$的变化是很缓慢的。同样，根据式（5.46）和式（5.47），$A(t)$和$\varphi(t)$也是慢变化的。这样一来，宽带随机过程通过窄带系统以后，输出随机过程就是窄带随机过程，其包

络$A(t)$是慢变化的随机过程，相位$\varphi(t)$也是一个缓慢变化的随机过程。最后需指出，$X(t)$存在于$(-\infty,\infty)$上，因此，上面证明过程中，应对a_{km}、b_{km}、$A_1(t)$和$B_1(t)$令$T\to\infty$作极限处理，但这并不影响证明，故略去。

例5.6 证明式（5.31）和式（5.36）的又一种方法。

证明：采用网络法证明。

$$X(t)=a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t$$

把$a(t)$看成是$X(t)$通过如图5.1所示系统的输出。下面先证式(5.36)。

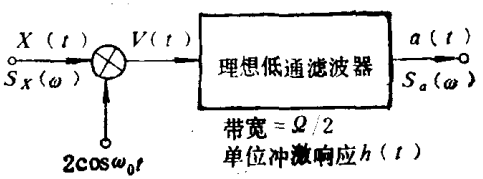


图 5.1 $a(t)$的产生

$$\begin{aligned}V(t)&=2X(t)\cos\omega_0 t\\&=2a(t)\cos^2\omega_0 t-2b(t)\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t\\&=a(t)+[a(t)\cos 2\omega_0 t-b(t)\sin 2\omega_0 t]\end{aligned}\tag{5.48}$$

上式中括号一项仅是把输入过程$X(t)$搬移到一个新的中心频率$2\omega_0$上的结果，而$a(t)$是一个中心频率为零的低频限带随机过程。理想低通滤波器使$a(t)$不变地通过，但滤除了括号一项。因此，输出是$a(t)$，其自相关函数为

$$\begin{aligned}R_a(\tau)&=E[a(t)a(t+\tau)]\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int h(u)h(v)E[V(t-u)V(t+\tau-v)]\,du\,dv\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int h(u)h(v)R_X(\tau+u-v)\cdot 4\cos[\omega_0(t-u)]\\&\quad\times\cos[\omega_0(t+\tau-v)]\,du\,dv\end{aligned}\tag{5.49}$$

把式（5.49）中的$R_X(\tau+u-v)$用其功率谱密度$S_X(\omega)$代替，余

弦函数用指数函数代替，则式（5.49）变成

$$R_o(\tau)=\frac{1}{2\pi}e^{j2\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\,e^{j(\omega+\omega_0)\tau}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\,e^{j(\omega-\omega_0)u}\,du$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}h(v)e^{-j(\omega+\omega_0)v}\,dvd\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)e^{j(\omega+\omega_0)\tau}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)e^{j(\omega+\omega_0)u}\,du$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}h(v)e^{-j(\omega+\omega_0)v}\,dvd\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)e^{j(\omega-\omega_0)\tau}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}h(u)e^{j(\omega-\omega_0)u}\,du\int_{-\infty}^{\infty}h(v)e^{-j(\omega-\omega_0)v}\,dvd\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}e^{-j2\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)e^{j(\omega-\omega_0)\tau}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}h(u)e^{j(\omega+\omega_0)u}\,du\int_{-\infty}^{\infty}h(v)e^{-j(\omega-\omega_0)v}\,dvd\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{j2\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)H^*(\omega-\omega_0)H(\omega+\omega_0)$$

$$\times e^{j(\omega+\omega_0)\tau}\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)[|H(\omega+\omega_0)|^2$$

$$\times e^{j(\omega+\omega_0)\tau}+|H(\omega-\omega_0)|^2e^{j(\omega-\omega_0)\tau}]d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}e^{-j2\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)H^*(\omega+\omega_0)H(\omega-\omega_0)$$

$$\times e^{j(\omega-\omega_0)\tau}d\omega \qquad (5.50)$$

因为$\omega_0\gg\Omega$，所以$H^*(\omega\pm\omega_0)$与$H(\omega\pm\omega_0)$相互不重叠，则有

$$H^*(\omega-\omega_0)H(\omega+\omega_0)=0$$

$$H^*(\omega+\omega_0)H(\omega-\omega_0)=0$$

因此式（5.50）中第一项和第三项都是零。在第二项中，令$\zeta_1=\omega+\omega_0$、$\zeta_2=\omega-\omega_0$，那么式（5.50）变成

$$R_a(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\zeta_1-\omega_0)|H(\zeta_1)|^2e^{j\zeta_1\tau}d\zeta_1$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\zeta_2+\omega_0)|H(\zeta_2)|^2e^{j\zeta_2\tau}d\zeta_2$$

现在用ω代替ζ_1和ζ_2得

$$R_a(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[S_X(\omega-\omega_0)+S_X(\omega+\omega_0)]|H(\omega)|^2e^{j\omega\tau}d\omega \qquad (5.51)$$

设$a(\tau)$的功率谱密度为$S_a(\omega)$，则从式（5.51）中得

$$S_a(\omega)=[S_X(\omega-\omega_0)+S_X(\omega+\omega_0)]|H(\omega)|^2$$

因为

$$|H(\omega)|^2=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant\Omega/2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

所以

$$S_a(\omega)=\begin{cases}S_X(\omega-\omega_0)+S_X(\omega+\omega_0), & |\omega|\leqslant\Omega/2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

用Lp[·]表示低通部分，则有

$$S_a(\omega)=\mathrm{Lp}[S_X(\omega-\omega_0)+S_X(\omega+\omega_0)]$$

这就证明了式（5.36）。

现在来证明式（5.31）。

因为

$$|H(\omega+\omega_0)|^2=\begin{cases}1, & |\omega+\omega_0|\leqslant\Omega/2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$|H(\omega-\omega_0)|^2=\begin{cases}1, & |\omega-\omega_0|\leqslant\Omega/2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

所以式（5.50）中的第二项又可写成

$$R_a(\tau)\quad\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0-\frac{\Omega}{2}}^{-\omega_0+\frac{\Omega}{2}}S_X(\omega)e^{j(\omega+\omega_0)\tau}\,d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\frac{\Omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Omega}{2}}S_X(\omega)e^{j(\omega-\omega_0)\tau}\,d\omega$$

为了不失一般性，而又不影响上式的结果，上式中的第一个积分的积分限可改写为（$-\infty$,0）、第二个积分的积分限可改写为（0,∞）。于是

$$R_a(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}S_X(\omega)e^{j(\omega+\omega_0)\tau}\,d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}S_X(\omega)e^{j(\omega-\omega_0)\tau}\,d\omega \qquad (5.52)$$

在式(5.52)的第一项中令$\omega=-\omega'$，并注意到$S_X(-\omega)=S_X(\omega)$，得

$$R_a(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}S_X(\omega)e^{-j(\omega-\omega_0)\tau}\,d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}S_X(\omega)e^{j(\omega-\omega_0)\tau}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}S_X(\omega)\cdot\frac{1}{2}\left[e^{-j(\omega-\omega_0)\tau}+e^{j(\omega-\omega_0)\tau}\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}S_X(\omega)\cos(\omega-\omega_0)\tau d\omega$$

于是，式（5.31）得证。

〔**例5.7**〕 设式（5.21）所表示的窄带随机过程的功率谱密度$S_X(f)$如图5.2*a*所示。若在$S_X(f)$频带内分别选择f_0为100Hz和98Hz，试求这两种情况下的$R_a(\tau)$和$R_{ab}(\tau)$。

解：（1）$f_0=100$Hz

根据式（5.36）和（5.37）及$S_a(f)$、$S_{ab}(f)$的求取方法，

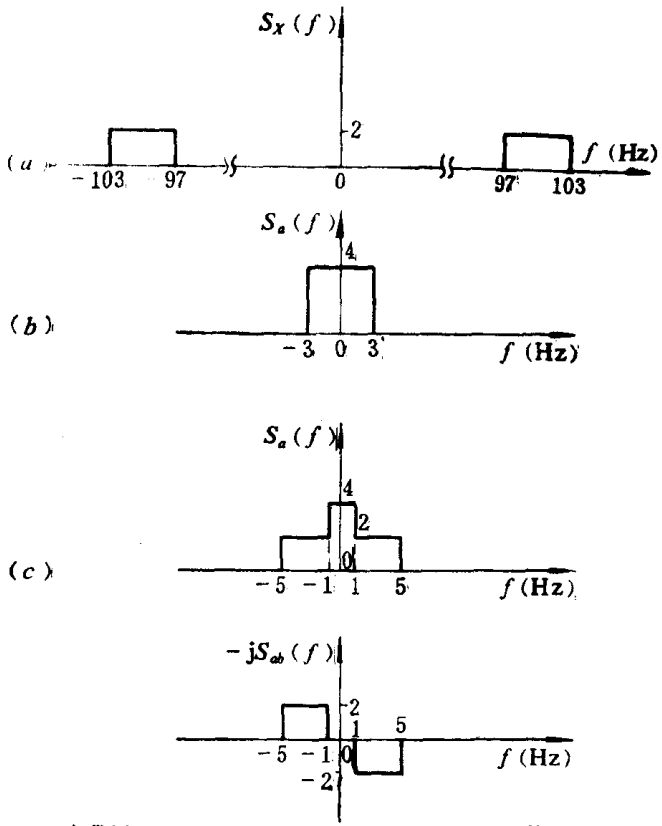


图 5.2 (a)窄带过程功率谱密度；(b)$f_0=100$Hz 时 $a(t)$ 的 $S_a(f)$；(c)$f_0=98$Hz时$a(t)$的$S_a(f)$；(d)$f_0=98$Hz时的$S_{ab}(f)$

把$S_X(f)$的图形进行搬移，得到$a(t)$的功率谱密度 $S_a(f)$（如图5.2b所示）及$S_{ab}(f)=0$。求$S_a(f)$、$S_{ab}(f)$的傅里叶反变换得

$$R_a(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}S_a(\omega)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\omega=2\int_0^{\infty}S_a(f)\cos2\pi f\tau\,\mathrm{d}f$$

$$=2\int_0^{3}4\cos2\pi f\tau\,\mathrm{d}f=24\frac{\sin6\pi\tau}{6\pi\tau}$$

$$R_{ab}(\tau)=0$$

（2）$f_0=98$Hz

同理，可得$S_a(f)$、$S_{ab}(f)$分别如图5.2c和图5.2d所示。于是

$$R_a(\tau)=24\frac{\sin 6\pi\tau}{6\pi\tau}\cos 4\pi\tau$$

$$R_{ab}(\tau)=16\frac{\sin 4\pi\tau}{4\pi\tau}\sin 6\pi\tau$$

通过该题的求解，可加深对$a(t)$、$b(t)$性质的理解。我们看到，无论f_0是100Hz，还是98Hz，或是其它时，$S_a(f)$的图形虽不一样，但$S_X(f)$和$S_a(f)$的积分都等于24，即$X(t)$与$a(t)$的平均功率相等，这就是式(5.32)的含义。当$f_0=98$Hz时，$R_{ab}(\tau)$是奇函数，$R_{ab}(0)=0$，即$a(t)$与$b(t)$在同一时刻是两个相互正交、不相关的随机变量。而当$f_0=100$Hz时，即$S_X(f)$在频带内关于f_0对称时，$R_{ab}(\tau)=0$，亦即$a(t)$与$b(t)$是两个相互正交、不相关的随机过程。

〔**例5.8**〕 试给出产生窄带噪声的两种方案。

解：在工程上，一般采用下面两种方案产生窄带噪声。

方案一。按照窄带随机过程的定义设计产生窄带噪声的系统。由例5.5知，窄带噪声可以看成是白噪声通过窄带系统的输出。因此，先根据窄带噪声功率谱密度的要求，设计一个中心频率为ω_0、带宽为$\Delta\omega$、且$\omega_0\gg 2\Delta\omega$的线性窄带系统；然后再设计一个白噪声源，作为窄带系统的输入；这样，窄带系统的输出就是窄带噪声。系统的组成如图5.3所示。



图 5.3 产生窄带噪声的第一种方案的系统

方案二。根据莱斯表达式设计窄带噪声的产生系统。重写莱斯表达式如下：

$$X(t)=a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t$$

由上式知，产生$X(t)$需产生低频限带随机过程$a(t)$和$b(t)$的两个白噪声发生器，需一个频率为ω_0的高频振荡器，还需两个乘法器

和一个加法器。产生窄带噪声的系统如图 5.4 所示。在图中，白噪声发生器 I 产生白噪声 $f_1(t)$，经低通滤波器后输出低频限带

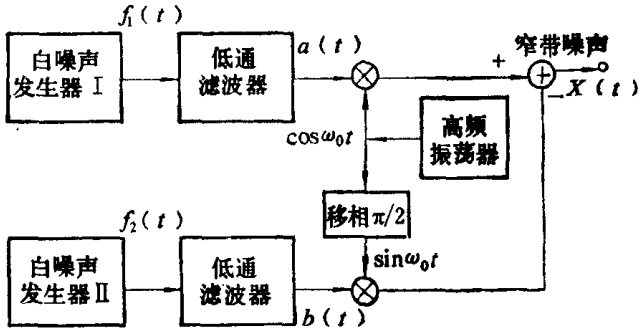


图 5.4　产生窄带噪声的第二种方案的系统

过程 $a(t)$，再经乘法器与高频正弦信号发生器的输出相乘送至加法器。同理可说明 $b(t)\sin\omega_0 t$ 的产生，在此略去。加法器的输出就是窄带噪声。窄带噪声的带宽受低通滤波器的截止频率控制。

〔例5.9〕 设某信号处理器方框图如图5.5所示，其输入为平稳窄带随机信号 $S(t)$。已知低通滤波器的带宽远小于窄带信号的中心频率，模数转换器A/D在 $t=nT$ 时刻对其输入采样，同相支路数字滤波器 $H(e^{j\omega})$ 的输出与其输入 $X(n)$ 之间的关系为

$$W(n)=X(n)-2X(n-1)-X(n-2)$$

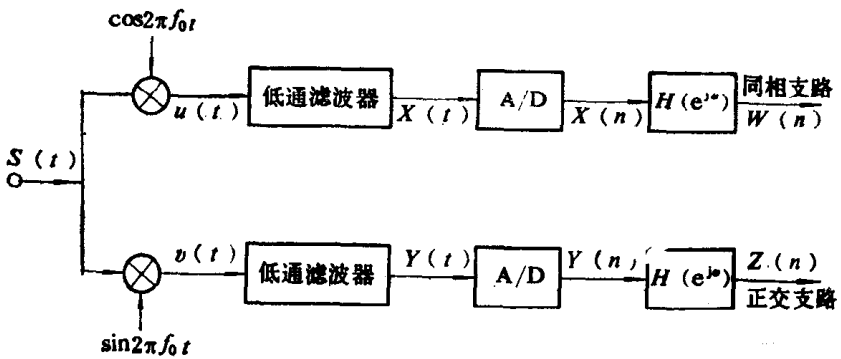


图 5.5　某信号处理器方框图

试求同相支路输出$W(n)$的功率谱密度。

解：输入平稳窄带随机信号$S(t)$可表示

$$S(t)=a(t)\cos 2\pi f_0 t-b(t)\sin 2\pi f_0 t$$

其中$a(t)$和$b(t)$与$\cos 2\pi f_0 t$和$\sin 2\pi f_0 t$相比是慢变化的。经混频后，同相支路的信号$u(t)$为

$$\begin{aligned}u(t)&=S(t)\cos 2\pi f_0 t=a(t)\cos^2 2\pi f_0 t\\&\quad-b(t)\sin 2\pi f_0 t\cos 2\pi f_0 t\\&=\frac{a(t)}{2}\left[1+\cos 4\pi f_0 t\right]-\frac{b(t)}{2}\sin 4\pi f_0 t\end{aligned}$$

由于低通滤波器的带宽远小于f_0，因此，$u(t)$经低通滤波器后，含$2f_0$频率项被滤掉，低通滤波器的输出

$$X(t)=\frac{1}{2}a(t)$$

该信号经A/D转换器在$t=nT$时刻采样后得

$$X(n)=\frac{1}{2}a(n)$$

其中$a(n)=a(nT)$。$X(n)$的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_X(m)&=E\left[X(n)X(n+m)\right]=\frac{1}{4}E\left[a(n)a(n+m)\right]\\&=\frac{1}{4}R_a(m)\end{aligned}$$

$X(n)$的功率谱密度为

$$S'_X(e^{j\omega})=\frac{1}{4}\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_a(m)e^{-jm\omega T}$$

根据$W(n)$与$X(n)$的关系式，可得数字滤波器的传递函数

$$H(e^{j\omega})=1-2e^{-j\omega T}-e^{-j2\omega T}$$

最后，得到同相支路输出$W(n)$的功率谱密度为

$$\begin{aligned}S'_W(e^{j\omega})&=\left|H(e^{j\omega})\right|^2 S'_X(e^{j\omega})\\&=\left|1-2e^{-j\omega T}-e^{-j2\omega T}\right|^2 S'_X(e^{j\omega})\end{aligned}$$

表 5.1　窄带高斯随机过程包络和相位的概率密度

概率密度 / 窄带过程	包　　络	相　　位	包络平方
窄带高斯随机过程 $N(t)=A(t)\cos[\omega_0 t+\Phi(t)]$ 方差为σ^2	包络：$A(t)$ $f_A(A_t)=\frac{A_t}{\sigma^2}e^{-[A_t^2/2\sigma^2]}U(A_t)$ ——瑞利分布	相位：$\Phi(t)$或$\Psi(t)$ $f_\Phi(\varphi_t)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, 0\leqslant\varphi_t\leqslant 2\pi\\ 0, \text{其它}\end{cases}$	$u(t)=A^2(t)$ $f_U(u_t)=\frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{u_t}{2\sigma^2}}\cdot U(u_t)$ ——指数分布
$X(t)=N(t)+a\cos(\omega_0 t+\theta)$ $\approx B(t)\cos[\omega_0 t+\Psi(t)]$ 其中a、ω_0为常数， θ在$[0, 2\pi]$上均匀分布。	包络：$B(t)=$ $\{[a\cos\theta+a(t)]^2+[a\sin\theta+b(t)]^2\}^{1/2}$ $f_B(B_t)=\frac{B_t}{\sigma^2}e^{-[(B_t^2+a^2)/2\sigma^2]}$ $\times I_0\left(\frac{aB_t}{\sigma^2}\right)U(B_t)$ ——广义瑞利分布（莱斯分布） $f_B(B_t)\approx$ $\begin{cases}\frac{B_t}{\sigma^2}e^{-\frac{B_t^2}{2\sigma^2}}U(B_t), & \frac{a}{\sigma}\ll 1\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-[(B_t-\sigma)^2/2\sigma^2]}, & \frac{a}{\sigma}\gg 1\end{cases}$ 其中$U(\cdot)$为单位阶跃函数 $I_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[x\cos\varphi]d\varphi$ 是第一类修正的零阶贝塞尔函数	相位：$\Psi(t)=\operatorname{arctg}\frac{a\sin\theta+b(t)}{a\cos\theta+a(t)}$ $f_\Psi(\Psi_t/\theta)=\frac{1}{2\pi}e^{-[\rho^2/2)}$ $+\frac{\rho\cos(\theta-\Psi_t)}{\sqrt{2\pi}}\Phi[\rho\cos(\theta-\Psi_t)]$ $\times e^{-[\rho^2\sin^2(\theta-\Psi t)/2]}$ 式中$\rho=\frac{a}{\sigma}$，$\Phi(\cdot)$为概率积分函数 $f_\Psi(\Psi_t/\theta)\approx$ $\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & \rho<<1\\ \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}e^{-[\rho^2(\Psi_t-\theta)^2/2]}, & \rho>>1\end{cases}$	$V(t)=B^2(t)$ $f_V(v_t)=$ $\frac{1}{2\sigma^2}e^{-[(v_t+a^2)/2\sigma^2]}$ $\times I_0\left(\frac{a\sqrt{v_t}}{\sigma^2}\right)U(v_t)$

三、窄带高斯随机过程包络和相位的概率密度

（一）包络和相位的概率密度

下面把窄带高斯随机过程的包络和相位的概率密度汇总于表5.1中，以便读者对照学习。对于这部分内容，读者应掌握的重要结论是，窄带高斯随机过程的包络和相位的一维概率密度分别为瑞利分布和均匀分布，且二者在同一时刻是两个相互统计独立的随机变量，但不是两个统计独立的随机过程。

（二）例解

〔例5.10〕 图5.6*a*所示系统中，已知随机相位正弦波$X(t)=\cos(\omega_0 t+\Theta)$，其中$\Theta$为$[0,2\pi]$内均匀分布的随机变量，白噪声$N(t)$的功率谱密度为$N_0/2$，带通滤波器特性如图5.6*b*所示，并且$\omega_0 \gg \Delta\omega$。

（1）求A点波形的功率谱密度和自相关函数；

（2）求B点波形的一维概率密度。

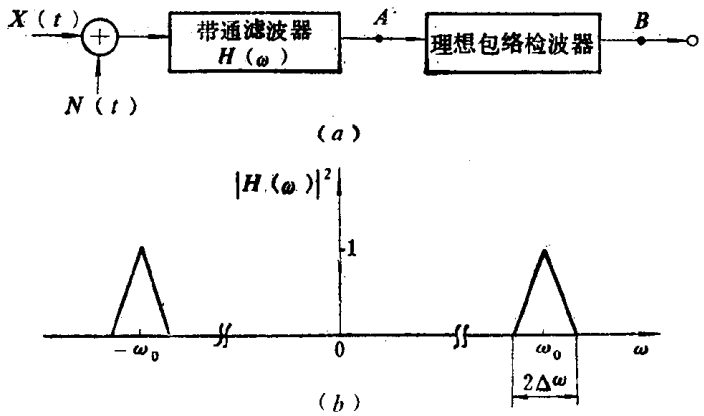


图 5.6 （*a*）系统图；（*b*）带通滤波器特性

解：（1）根据题意，$X(t)$无变化地通过带通滤波器，$N(t)$通过带通滤波器后为平稳窄带高斯噪声，记为$N_1(t)$。若记A点的波形为$Y(t)$，则

$$Y(t)=X(t)+N_1(t)$$

式中　$X(t)$与$N_1(t)$独立。$Y(t)$的自相关函数

$$R_Y(\tau)=R_X(\tau)+R_{N_1}(\tau)$$

$Y(t)$的功率谱密度

$$S_Y(\omega)=S_X(\omega)+S_{N_1}(\omega)$$

其中

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

$$=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$S_{N_1}(\omega)=|H(\omega)|^2S_N(\omega)=|H(\omega)|^2\frac{N_0}{2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{N_0}{2}\left[1-\dfrac{1}{\Delta\omega}||\omega|-\omega_0|\right], & |\omega\pm\omega_0|\leqslant\Delta\omega\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$Y(t)$的自相关函数具体形式为

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{N_0\Delta\omega}{\pi}\left(\frac{\sin\Delta\omega\tau/2}{\Delta\omega\tau/2}\right)^2\right]\cos\omega_0\tau$$

（2）记B点的波形为$Z(t)$，则$Z(t)$就是$Y(t)$的包络，$Z(t)$的一维概率密度为广义瑞利分布。根据题意，确定$a=1$，$N_1(t)$的平均功率$\sigma^2=\Delta fN_0$，所以

$$f_Z(z)=\frac{z}{\Delta fN_0}\exp[-(z^2+1)/2\Delta fN_0]I_0(z/\Delta fN_0)U(z)$$

式中　$\Delta f=\Delta\omega/2\pi$。

Ⅲ．习　　题

5—1　证明：

（1）$H\left[\dfrac{\sin t}{t}\right]=\dfrac{1-\cos t}{t}$　　（2）$H[e^{j\omega_0 t}]=-je^{j\omega_0 t}$

（3）$H^{-1}\left[\frac{1}{\pi t}\right]=\delta(t)$　　（4）$H^{-1}\left[\frac{t}{1+t^2}\right]=\frac{1}{1+t^2}$

（5）$H^{-1}\left[\frac{\sin t}{t}\sin 200\pi t\right]=\frac{\sin t}{t}\cos 200\pi t$

（6）$H^{-1}\left[\frac{\sin t}{t}\cos 200\pi t\right]=-\frac{\sin t}{t}\sin 200\pi t$

5—2　证明：(1)若$z(t)=a(t)y(t)$及当$|f|>B$时$A(f)=0$、当$|f|<B$时$Y(f)=0$；则$\hat{z}(t)=a(t)\hat{y}(t)$。

（2）若$y(t)=h(t)*x(t)$，则$\hat{y}(t)=\hat{h}(t)*x(t)=h(t)*\hat{x}(t)$

（3）$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\hat{x}(t)\mathrm{d}t=0$

（4）$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)\,\mathrm{d}t=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\hat{x}^2(t)\mathrm{d}t$

5—3　证明：（1）偶函数的希尔伯特变换为奇函数。

（2）奇函数的希尔伯特变换为偶函数。

5—4　若确定信号$a(t)$的频谱满足

$$A(\omega)=\begin{cases}A(\omega), & |\omega|\leqslant\omega_0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则有

（1）$H[a(t)\cos\omega_0 t]=a(t)\mathrm{sgn}(\omega_0)\sin\omega_0 t$

（2）$H[a(t)\sin\omega_0 t]=-a(t)\mathrm{sgn}(\omega_0)\cos\omega_0 t$

（3）$H[a(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}]=-\mathrm{j}a(t)\mathrm{sgn}(\omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$

5—5　当ω_0与τ应满足什么关系时，能使$\tilde{s}(t)=\frac{\sin(\pi t/\tau)}{\pi t/\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$为解析信号，并画出$\frac{\sin(\pi t/\tau)}{\pi t/\tau}$和$\tilde{s}(t)$的频谱图。

5—6　对于调频信号$s(t)=\cos[\omega_0 t+m(t)]$，当$\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}\ll\omega_0$时为窄带信号。求$s(t)$的包络和复包络。

5—7　设$\boldsymbol{X}(t)=[X_1(t)\ \ X_2(t)\ \ X_1(t+\tau)\ \ X_2(t+\tau)]^T$，$X_2(t)$是$X_1(t)$的希尔伯特变换，$X_1(t)$是均值为零、方差为1的高斯过程。证明：如果$X_1(t)$是平稳的，那么

$$E[\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{T}(t)]=\begin{Bmatrix}1 & 0 & R_1(\tau) & \hat{R}_1(\tau)\\ 0 & 1 & -\hat{R}_1(\tau) & R_1(\tau)\\ R_1(\tau) & -\hat{R}_1(\tau) & 1 & 0\\ \hat{R}_1(\tau) & R_1(\tau) & 0 & 1\end{Bmatrix}$$

其中 $R_1(\tau)=E[X_1(t)X_1(t+\tau)]$。

5—8 在式(5.10)中，令$X(t)=S(t)+N(t)$，其中$S(t)$为有用信号、$N(t)$是零均值和σ_N^2方差的高斯噪声。试证：（1）$\widetilde{X}(t)$的包络

$$A_X(t)\approx[X^2(t)+\hat{X}^2(t)]^{1/2}=\{[S(t)+N(t)]^2+[\hat{S}(t)+\hat{N}(t)]^2\}^{1/2}$$

的一维概率密度为

$$f_{A_X}(a_X)=\frac{a_X}{\sigma_N^2}\exp[-(a_X^2+a_S^2)/2\sigma_N^2]\cdot I_0\left(\frac{a_Xa_S}{\sigma_N^2}\right)U(a_X)$$

其中a_X是$A_X(t)$的取值、a_S是$A_S(t)=[S^2(t)+\hat{S}^2(t)]^{1/2}$的取值。

（2）$\widetilde{X}(t)$的相位

$$\Phi_X(t)=\operatorname{arctg}[\hat{X}(t)/X(t)]=\operatorname{arctg}\frac{\hat{S}(t)+\hat{N}(t)}{S(t)+N(t)}$$

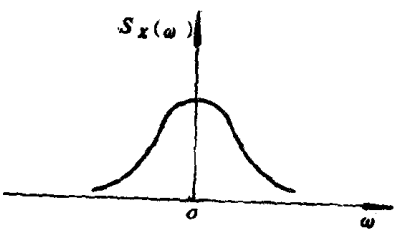
的一维概率密度为

$$f_{\Phi X}(\varphi_X)=(2\pi)^{-1}\exp[-a_S^2/2\sigma_N^2]\cdot\{1+\gamma\sqrt{\pi}\exp(\gamma^2)[1+\operatorname{erf}\gamma]\}$$

式中 $\gamma=a_S\cos\Phi/\sqrt{2}\sigma_N$，$\Phi=\Phi_X-\Phi_S$，$\operatorname{erf}(\cdot)$为误差函数。

5—9 证明：对于式(5.21)的窄带过程，若$\widetilde{A}(t)$和$\widetilde{A}_\tau(t)$分别是过程$X(t)$和$X(t-\tau)$的复包络，那么$\widetilde{A}_\tau(t)=\widetilde{A}(t)e^{-j\omega_0\tau}$。

5—10 已知平稳过程$X(t)$的功率谱密度$S_X(\omega)$如图题5-10所示。记$\hat{X}(t)$为$X(t)$的希尔伯特变换，求随机过程$W(t)=X(t)\cos\omega_0t-\hat{X}(t)\sin\omega_0t$



图题 5—10 $S_X(\omega)$的图形

的功率谱密度，并图示它。

5—11 设窄带平稳随机过程$X(t)=a(t)\cos\omega_0t-b(t)\sin\omega_0t$的功率谱密度$S_X(\omega)$满足

$$\begin{cases}S_X(\omega)=0, & |\omega|\geqslant 2\omega_0\\ S_X(\omega_0+\omega)=S_X(\omega_0-\omega), & 0\leqslant\omega<\omega_0\end{cases}$$

即$S_X(\omega)$在频带内关于中心频率ω_0对称。证明$X(t)$的自相关函数$R_X(\tau)=R_a(\tau)\cos\omega_0\tau$，并求$X(t)$自相关函数的预包络和包络。

5—12　对于窄带平稳随机过程$X(t)=a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t$，若其均值为零，功率谱密度为

$$S_X(\omega)=\begin{cases}P\cos[\pi(\omega-\omega_0)/\Delta\omega], & |\omega-\omega_0|\leqslant\dfrac{\Delta\omega}{2}\\ P\cos[\pi(\omega+\omega_0)/\Delta\omega], & |\omega+\omega_0|\leqslant\dfrac{\Delta\omega}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

式中P、$\Delta\omega$以及$\omega_0\gg\Delta\omega$都是正实常数。试求：

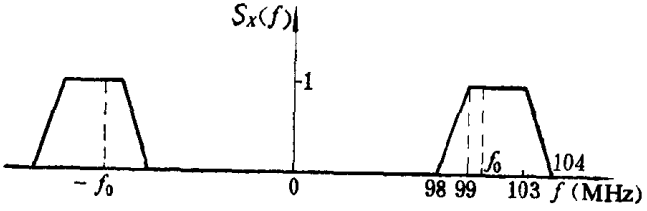
（1）$X(t)$的平均功率；

（2）$a(t)$的功率谱密度$S_a(\omega)$；

（3）互相关函数$R_{ab}(\tau)$或互谱密度$S_{ab}(\omega)$；

（4）$a(t)$与$b(t)$是否正交或不相关？

5—13　在题5-12中，若$X(t)$的功率谱密度如图题5-13所示，重做题5-12（设$f_0=100$MHz）。

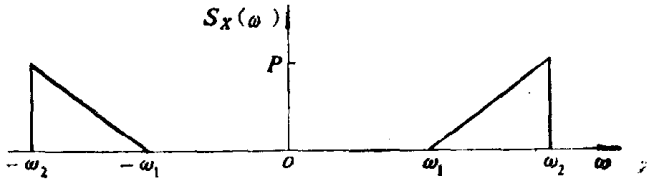


图题 5—13　$X(t)$的功率谱密度

5—14　平稳噪声$X(t)$可表示为$X(t)=a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t$，其功率谱密度如图题5-14所示。画出下列情况$a(t)$和$b(t)$各自的功率谱密度图：

（1）$\omega_0=\omega_1$；　（2）$\omega_0=\omega_2$；　（3）$\omega_0=\dfrac{1}{2}(\omega_2+\omega_1)$；

（4）上述哪一种情况，过程$a(t)$和$b(t)$是不相关的？

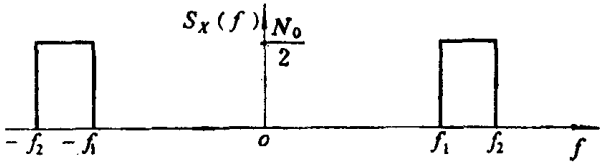


图题 5—14　$X(t)$的功率谱密度

5—15 设平稳噪声$X(t)=a(t)\cos 2\pi f_0 t-b(t)\sin 2\pi f_0 t$，若其功率谱密度如图题5-15所示。图中$f_1=100\text{Hz}$，$f_2=104\text{Hz}$。对下列情况求$S_a(f)$、$S_b(f)$和$S_{ab}(f)$，并作图：

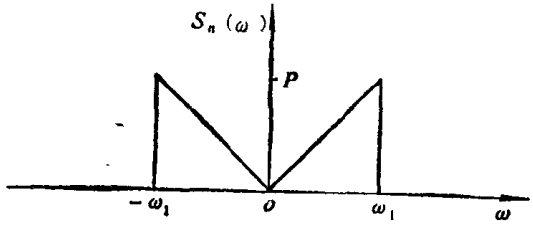
（1）$f_0=f_1$；（2）$f_0=f_2$；（3）$f_0=\frac{1}{2}(f_1+f_2)$

（4）对上面$S_{ab}(f)\neq 0$情况，求$R_{ab}(\tau)$，并作图。



图题 5—15 $X(t)$的功率谱密度

5—16 设噪声$n(t)$是宽平稳，其功率谱密度$S_n(\omega)$如图题5-16所示，求$X(t)=n(t)\cos(\omega_0 t+\theta)-n(t)\sin(\omega_0 t+\theta)$的功率谱密度$S_X(\omega)$，并作图。式中，$\theta$是在$(0,2\pi)$内均匀分布的随机变量；$\omega_0\gg\omega_1$；$\theta$与$n(t)$统计独立。



图题 5—16 $n(t)$的功率谱密度图

5—17 设信号加噪声过程为$X(t)=a\cos 2\pi(f_0+f_d)t+N(t)$，其中，$N(t)=a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t$是理想窄带高斯过程$(\omega_0=2\pi f_0)$，其双边功率谱密度为

$$S_N(f)=\begin{cases}N_0/2, & |f\pm f_0|\leqslant B/2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

并且$f_d<B/2$。于是

$$X(t)=a\cos 2\pi(f_0+f_d)t+p(t)\cos 2\pi(f_0+f_d)t-q(t)\sin 2\pi(f_0+f_d)t$$

（1）用$a(t)$和$b(t)$表示$p(t)$和$q(t)$；求$p(t)$和$q(t)$的功率谱密度。

（2）求$p(t)$和$q(t)$的互谱密度$S_{pq}(f)$和互相关函数$R_{pq}(\tau)$；过程$p(t)$与$q(t)$相关吗？在同一时刻上采样的$p(t)$和$q(t)$独立吗？

5—18 设随机过程$X(t)=a(t)\cos(\omega_0 t+\theta)-b(t)\sin(\omega_0 t+\theta)$，其中，随机变量$\theta$是一个独立随机变量，它在$(0,2\pi)$内均匀分布，$a(t)$和$b(t)$的意义见式(5.22)和式(5.23)。若$E[X(t)]=0$，试证明：

(1) 当$X(t)$为高斯过程时，$a(t)$和$b(t)$也是高斯过程。

(2) 式(5.32)、(5.33)、(5.34)、(5.36)和式(5.37)各自表示的性质成立。

5—19 设有一理想线性包络检波器接收到的信号为调幅信号与零均值窄带平稳高斯过程之和，即

$$X(t)=s(t)+N(t)=m(t)\cos\omega_0 t+a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t$$

式中$m(t)$为确定函数，并已知$E[a^2(t)]=E[b^2(t)]=N_0$，$E[a(t)b(t+\tau)]=E[a(t+\tau)b(t)]=0$，试求该检波器输出的一维概率密度。

5—20 对于零均值、σ^2方差的窄带平稳高斯过程

$$X(t)=a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t=A(t)\cos[\omega_0 t+\varphi(t)]$$

求证：包络$A(t)$在任意时刻所给出的随机变量A_t的均值和方差分别为

$$E[A_t]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma,\quad \sigma_{A_t}^2=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$$

5—21 已知$X(t)$为信号与窄带平稳高斯噪声之和为$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\theta)+N(t)$，式中$\theta$是$(0,2\pi)$上均匀分布的独立随机变量，$N(t)$为窄带平稳高斯噪声，且均值为零、方差为$\sigma^2$，并可表示为$N(t)=a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t$求证：$X(t)$的包络平方的自相关函数为

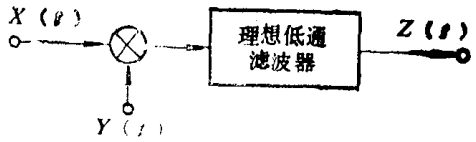
$$R_X(\tau)=a^4+4a^2\sigma^2+4\sigma^4+4[a^2R_a(\tau)+R_a^2(\tau)+R_{ab}^2(\tau)]$$

5—22 功率谱密度为$\frac{N_0}{2}$W/Hz的平稳白噪声经耦合电容加到矩形带通滤波器，测得滤波器的中心频率为60MHz，通带宽度为1MHz，通带内的电压增益为4。若再在滤波器后加理想线性包络检波器，试求检波器输出的均值和方差。

5—23 远方发射台发送一个幅度不变、角频率为ω_0的正弦波，通过衰落信道传输后到达接收端时，信号变为具有参数σ_S^2的瑞利型包络分布的随机信号。在接收端又有高斯噪声混入，噪声的方差为σ_N^2，这样，信号加噪声同时通过中心频率为ω_0的高频窄带系统。求证：窄带系统输出的信号与噪声之和的包络也是服从瑞利分布的，其参数为$\sigma_S^2+\sigma_N^2$。

5—24 同步检波器如图题5-24所示。令$X(t)$为窄带平稳噪声，其自相关函数为

$$R_X(\tau)=\sigma_X^2 e^{-\beta|\tau|}\cos\omega_0\tau,\qquad \beta\ll\omega_0$$



图题 5—24 同步检波器

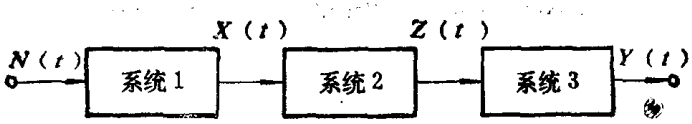
而$Y(t)=A\sin(\omega_0 t+\Theta)$，$A$为常数，$\Theta$是与$X(t)$独立的、且在$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量。试求该检波器输出的平均功率。

5—25 如图题5-25所示，系统1为线性对称窄带系统，其中心频率为ω_0；系统2的传输函数等于$-j\mathrm{sgn}(f)$；系统3为理想微分线性系统。输入$N(t)$是自相关函数为$\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$的白噪声。系统1输出过程自相关函数的包络为$e^{-\tau^2}$。若整个系统已进入稳态，试求：

（1）$X(t)$和$Z(t)$各自的自相关函数；

（2）$Y(t)$的自相关函数、均值和方差；

（3）$Y(t)$的一维分布近似于什么分布？为什么？



图题 5—25

5—26 设调幅信号与窄带高斯噪声之和为

$$Y(t)=S(t)+N(t)=B(t)\cos\omega_0 t+[a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t]$$

式中，$B(t)$为确定函数；$a(t)$和$b(t)$是相互独立的平稳高斯过程，它们的均值都是零、方差都是σ^2。

证明：

$$E[R^k(t)\cos m\Phi(t)]=\left(\frac{m+k}{2}\right)!\frac{B^m(t)}{m!}$$

$$\times {}_1F_1\left(\frac{m-k}{2};\ m+1;\ -\frac{B^2(t)}{2\sigma^2}\right)$$

$$k、m=0,,12,\cdots$$

式中

$$F_1(\alpha;\beta;-\gamma)=1-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{1}+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha+1}{\beta+1}$$

$$-\frac{r^2}{2!}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\alpha+1}{\beta+1}\frac{\alpha+2}{\beta+2}\frac{\gamma^3}{3!}+\cdots$$

为合流超几何函数 (Confluent hypergeometric function)；

$$R(t)=[(B(t)+a(t))^2+b^2(t)]^{1/2}$$

$$\Phi(t)=\operatorname{arctg}\left[\frac{b(t)}{B(t)+a(t)}\right]$$

5—27 系统如图题5-27所示，输入为白噪声，其自相关函数为$\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$。对包络平方检波后的过程进行两次独立采样，求积累后的$Z(t)$的分布。



图题 5—27

5—28 证明n个自由度的中心x^2变量的第m阶中心矩为

$$2^m\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}+m-1\right)$$

5—29 假定X是N个自由度的中心x^2分布，Y是M个自由度的非中心x^2变量，其非中心参量为λ。假定X和Y统计独立，而且高斯变量的方差为1。试求$Z=X+Y$的概率密度。

5—30 设x变量为x^2变量的平方根。试证明n个自由度的x变量的概率密度为

$$f(x)=\frac{x^{n-1}e^{-x^2/2}}{2^{(n-2)/2}\Gamma(n/2)}$$

5—31 已知$A(t)$和$B(t)$的定义见表前面5.1，试证：

(1) $E[A^n(t)]=(2\sigma^2)^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$

式中 $\Gamma(\cdot)$为Γ-函数，$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$，$(\alpha>0)$

(2) $E[B^n(t)]=(2\sigma^2)^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot{}_1F_1\left(-\frac{n}{2};1;-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)$

式中${}_1F_1(\cdot;\cdot;\cdot)$的定义见题5-26。

第六章　随机信号通过非线性系统的分析

Ⅰ．本章要点

随机信号通过非线性系统的分析，是随机信号变换的另一个重要课题。在教材里，本章介绍了四种求解无惰性非线性系统输出均值、自相关函数的方法——直接法、矩函数法、特征函数法和包线法。在此基础上，给出了计算非线性系统输出信噪比的一般方法。

本章的重点及其要求：（1）学会利用第一章随机变量函数的概率密度求解方法，计算非线性系统输出的概率密度；（2）掌握四种方法的特点、使用条件，并能灵活运用它们计算非线性系统在高斯随机信号激励下的输出自相关函数；（3）掌握非线性系统输出信噪比计算的一般原则。

Ⅱ．基本内容与例解

一、无惰性非线性系统输出概率密度的计算

（一）无惰性非线性系统

通常把非线性系统分成无惰性和有惰性两大类。本章假设所研究的系统是无惰性（或无记忆）的时不变非线性系统。设图6.1所示的非线性系统的传输特性为

$$y=g(x) \tag{6.1}$$

在某一给定的时刻，非线性系统的输出$y(t)$只取决于同一时刻的

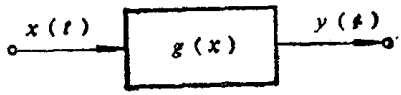


图 6.1 非线性系统示意图

输入 $x(t)$，而与 $x(t)$ 的任何过去或未来值无关。与线性系统比较，非线性系统具有下述特点：(1) 叠加原理已不适用，故当信号与噪声共同通过非线性系统时，不能象线性系统时那样将它们分开研究；(2) 会在输出端产生出输入随机信号中不含有的新频率分量；(3) 其分析方法繁杂。

(二) 非线性系统输出概率密度的计算

由传输特性及输入随机信号的概率密度确定非线性系统输出概率密度，可根据第一章中介绍的随机变量函数变换的原理来求解，其步骤为：

(1) 写出输入随机信号的一维概率密度 $f_x(x;t)$ 或二维概率密度 $f_x(x_1,x_2;t_1,t_2)$；

(2) 写出非线性系统的传输特性 $y=g(x)$，并求其反函数；

(3) 根据反函数的单值性或多值性求雅可比因子。若求输出的一维概率密度，当反函数具有单值性时，雅可比因子 $J=\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$；当反函数具有 n 个值时，雅可比因子 $J_i=\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}y$ $(i=1,2,\cdots,n)$。若求输出的二维概率密度，并假定反函数具有单值性，则雅可比因子为

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2}\end{vmatrix} \tag{6.2}$$

式中 $y_1=g(x_1)$、$y_2=g(x_2)$、$x_1=x(t_1)$、$x_2=x(t_2)$。

(4) 写出相应的输出的概率密度。输出的一维概率密度为

$$f_Y(y;t)=\begin{cases}\left|\dfrac{dx}{dy}\right| f_X(x;t), & \text{当}g(x)\text{单调时} \quad (6.3)\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left|\dfrac{dx_i}{dy}\right| f_X(x_i;t), & \text{当}g(x)\text{非单调时} \quad (6.4)\end{cases}$$

式中x_i表示t时刻一个y值对应n个x值中的第i个x值（注意同二维的记法区别开）。二维的概率密度为

$$f_Y(y_1,y_2;t_1,t_2)=|J|f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) \quad (6.5)$$

J的表达式见式（6.2）。

（三）例解

〔例6.1〕 设非线性系统的传输特性$y=x^2$。若输入随机信号$X(t)$是零均值、单位方差、相关系数为$r_X(\tau)$的高斯平稳过程，求输出$Y(t)$的一维和二维概率密度。

解： 输入随机信号$X(t)$的一维概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

二维概率密度为

$$f_X(x_1,x_2;\tau)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r_X^2(\tau)}}\exp\left\{-\frac{x_1^2-2r_X(\tau)x_1x_2+x_2^2}{2[1-r_X^2(\tau)]}\right\}$$

式中x_1、x_2分别为$X(t)$和$X(t+\tau)$的取值。

（1）输出$Y(t)$一维概率密度的计算　因为$y=x^2$，所以$x=\pm\sqrt{y}$，即$x_1=\sqrt{y}$，$x_2=-\sqrt{y}$，相应的雅可比因子为

$$J_1=\frac{dx_1}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}} \quad J_2=\frac{dx_2}{dy}=-\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

根据式（6.4）得

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=\sum_{i=1}^{2}\left|\frac{dx_i}{dy}\right| f_X(x_i)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})\\&\quad+\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| f_X(-\sqrt{y})\\&=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2}, \qquad y\geqslant 0$$

当$y<0$时，$f_Y(y)=0$，因此$Y(t)$的一维概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2}U(y)$$

式中$U(\cdot)$为单位阶跃函数。

（2）输出$Y(t)$二维概率密度的计算　对于$y_1>0$、$y_2>0$，有$x_1=\pm\sqrt{y_1}$和$x_2=\pm\sqrt{y_2}$，相应的四个雅可比因子分别为

$$J_1=\frac{1}{4\sqrt{y_1y_2}},\quad J_2=\frac{1}{4\sqrt{y_1y_2}},$$

$$J_3=-\frac{1}{4\sqrt{y_1y_2}},\quad J_4=-\frac{1}{4\sqrt{y_1y_2}}$$

于是有

$$\begin{aligned}f_Y(y_1,y_2;\tau)=&\frac{1}{4\sqrt{y_1y_2}}\left[f_X(\sqrt{y_1},\sqrt{y_2};\tau)\right.\\&+f_X(-\sqrt{y_1},\sqrt{y_2};\tau)+f_X(\sqrt{y_1},-\sqrt{y_2};\tau)\\&\left.+f_X(\sqrt{y_1},-\sqrt{y_2};\tau)\right]U(y_1)U(y_2)\\=&\frac{1}{4\pi\sqrt{y_1y_2(1-r_X^2(\tau))}}\\&\times\left[\exp\left\{-\frac{y_1-2r_X(\tau)\sqrt{y_1y_2}+y_2}{2(1-r_X^2(\tau))}\right\}\right.\\&\left.+\exp\left\{-\frac{y_1+2r_X(\tau)\sqrt{y_1y_2}+y_2}{2(1-r_X^2(\tau))}\right\}\right]\\&\times U(y_1)U(y_2)\end{aligned}$$

〔**例6.2**〕　设一平滑限幅器的限幅特性（传输特性）是误差函数，如图6.2所示，它的表示式为

$$y=\frac{1}{K\sqrt{2\pi}\,\sigma_L}\int_0^x\exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma_L^2}\right\}dt \qquad -\infty<x<\infty$$

式中K为常数，σ_L表示限幅特性偏离双向理想限幅特性的参数。

若输入平稳高斯噪声的概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right\}$$

求限幅器输出的一维概率密度。

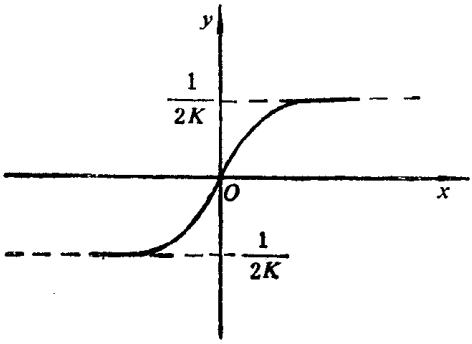


图 6.2 平滑限幅器传输特性

解：y 是 x 的单调函数，y 对 x 的导函数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{K\sqrt{2\pi}\,\sigma_L}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_L^2}\right\}$$

得雅可比因子

$$J=\frac{dx}{dy}=K\sqrt{2\pi}\,\sigma_L\exp\left\{\frac{x^2}{2\sigma_L^2}\right\}$$

则输出噪声的一维概率密度为

$$f_Y(y)=|J|f_X(x)=K\sqrt{2\pi}\,\sigma_L\exp\left\{\frac{x^2}{2\sigma_L^2}\right\}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right\}$$

$$=K\frac{\sigma_L}{\sigma_x}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\left(1-\frac{\sigma_X^2}{\sigma_L^2}\right)\right\}$$

令 $a=\frac{\sigma_L^2}{\sigma_X^2}$，得

$$f_Y(y)=K\sqrt{a}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\right\},\quad |y|\leqslant\frac{1}{2K}$$

在上式中，x 应换为 y 的函数关系式。但因 x 是 y 的隐函数，不

易写出，暂以上式的形式表示。在作图时，由给定的 x 值，利用限幅特性和上式分别求出 y 值和 $f_Y(y)$ 值，最后在 $f_Y(y)$ 对 y 的直角坐标系上描出输出概率密度曲线。上式表明，对应于不同的 a 值，输出概率密度有所不同，下面给出三种不同 a 值时的输出概率密度。

（1）当 $a=1$ 时，得

$$f_Y(y)=K \qquad |y|\leqslant\frac{1}{2K}$$

可见在限幅区间内，输出服从均匀分布，如图6.3所示。

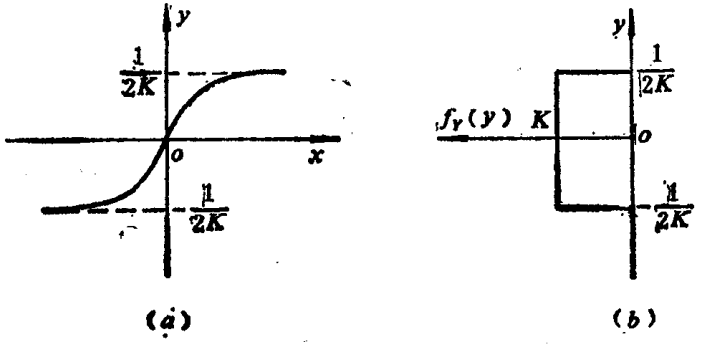


图 6.3 （a）限幅特性；（b）输出概率密度

（2）当 $a\approx\infty$ 时，得

$$f_Y(y)\approx K\sqrt{a}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right\},\quad |y|\leqslant\frac{1}{2K}$$

这时输出概率密度在限幅区间内近似于高斯分布。这并不难理解，因为 $a\approx\infty$ 相当于 $\sigma_L\approx\infty$，这时，限幅特性曲线在限幅区间内变成过原点的直线，因而输出分布曲线的形状也就不会改变。如图6.4所示。

（3）当 $a=0$ 时，平滑限幅特性变为双向硬限幅，并有

$$f_Y(y)=\frac{1}{2}\delta\left(y+\frac{1}{2K}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(y-\frac{1}{2K}\right)$$

因为分布曲线下的面积等于 1，故在两个限幅电平处的概率密度均为δ函数，强度都是1/2，如图6.5所示。

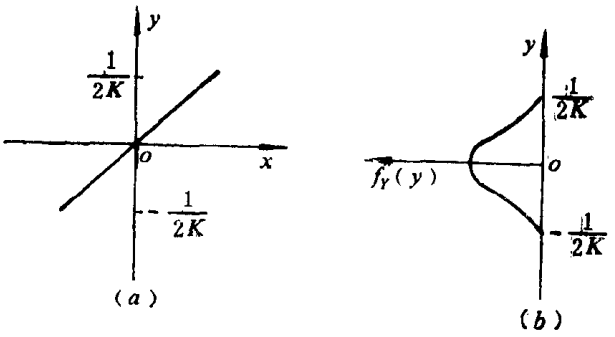


图 6.4 （a）限幅特性；（b）输出概率密度

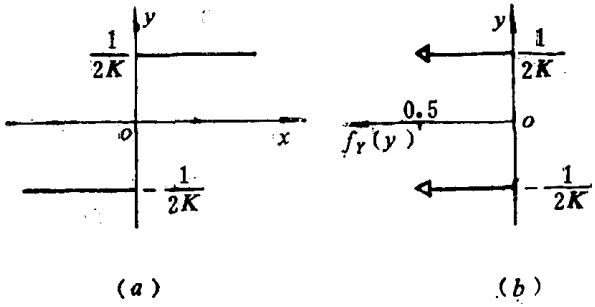


图 6.5 （a）双向硬限幅特性；（b）输出概率密度

图6.6画出了不同 a 值时，平滑限幅器的输出分布曲线。可选用合适的 a 值，以使输出概率密度曲线变为所需形状。为使输出概率密度曲线呈均匀分布，在噪声调频干扰机中的限幅器，通常选用 $a \approx 1$。

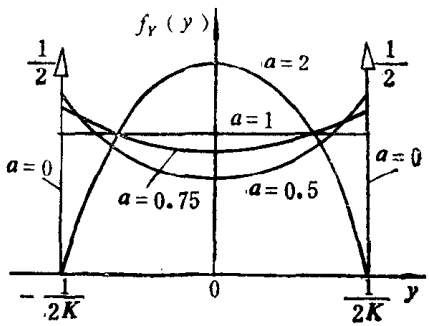


图 6.6 平滑器输出的概率密度曲线

二、计算非线性系统输出统计特性的各种方法

下面介绍四种求解非线性系统输出统计特性的方法。假设输入随机信号$X(t)$的二维概率密度函数为$p_X(x_1,x_2;\tau)$，于是，无惰性非线性系统的输出随机信号是宽平稳的。

（一）直接法

采用直接法计算非线性系统输出统计特性的步骤：

（1）写出非线性系统的传输特性和输入随机信号的一维概率密度或二维概率密度；

（2）根据下式计算输出的均值

$$m_Y=E[Y(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_X(x)\mathrm{d}x \tag{6.6}$$

（3）根据下式计算输出的自相关函数

$$R_Y(\tau)=\iint_{-\infty}^{\infty}g(x_1)g(x_2)f_X(x_1,x_2;\tau)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{6.7}$$

（4）根据下式计算输出的平均功率

$$E[Y^2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}g^2(x)f_X(x)\mathrm{d}x \tag{6.8}$$

（5）对$R_Y(\tau)$进行傅里叶变换得输出功率谱密度$S_Y(\omega)$。

这种方法的优点是直观。当输入随机信号的概率密度表达式和非线性系统的传输特性都比较简单时，这种方法相当有效。否则，直接求二重积分将会遇到困难。

（二）特征函数法

1．特征函数法　利用特征函数法求解输出自相关函数的步骤：

（1）写出非线性系统的传输特性，并求其傅里叶变换

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\,\mathrm{d}x \tag{6.9}$$

或单边拉普拉斯变换

$$F(s)=\int_0^{\infty} g(x)\ \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x \tag{6.10}$$

（2）计算输入随机信号的二维特征函数

$$C_X(u,v,\tau)=E[\mathrm{e}^{ju X_1+jvX_2}] \tag{6.11}$$

或

$$C_X(s_1,s_2,\tau)=E[\mathrm{e}^{s_1X_1+s_2X_2}] \tag{6.12}$$

式中u、v为实变量，s_1、s_2为复变量；$X_1=X(t_1)$，$X_2=X(t_2)$。

（3）输出的自相关函数可通过计算下列积分得到。

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int F(u)E(v)C_X(u,v,\tau)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{6.13}$$

或

$$R_Y(\tau)==-\frac{1}{4\pi^2}\iint_D F(s_1)F(s_2)C_X(s_1,s_2,\tau)\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2 \tag{6.14}$$

式中D表示复平面上的积分路线。

（4）对$R_Y(\tau)$作傅里叶变换便得到输出功率谱密度$S_X(\omega)$。

这种方法可以在一定程度上解决直接法遇到的计算积分的困难，类似于把“时域”中难处理的问题变换到“频域”里来处理。但当特征函数和转移函数较复杂时，仍然会产生求解积分的困难。

2．普赖斯（Price）方法　设非线性系统的输入是零均值、σ^2方差和相关系数为$r_X(\tau)$的平稳高斯过程，则运用普赖斯方法求系统输出自相关函数的步骤如下：

（1）对非线性系统的传输特性$g(x)$求k次导数得$g^{(k)}(x)$，且要求$g^{(k)}(x)$的形式比较简单（如δ函数）；

（2）求下列等式右边的积分

$$\frac{\partial^k R_Y(\tau)}{\partial r^k}=\frac{\sigma^{2(k-1)}}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int g^{(k)}(x_1)g^{(k)}(x_2)$$

$$\times\exp\left\{-\frac{x_1^2-2rx_1x_2+x_2^2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{6.15}$$

式中 $r=r_X(\tau)$；

（3）利用下式确定边界条件：

$$\left.\frac{\partial^{k-1}R_Y(\tau)}{\partial r^{k-1}}\right|_{r=0}、\left.\frac{\partial^{k-2}R_Y(\tau)}{\partial r^{k-2}}\right|_{r=0}、\cdots、R_Y(\tau)\Big|_{r=0}$$

$$\left.\frac{\partial^k R_Y(\tau)}{\partial r^k}\right|_{r=0}=\sigma^{2k}\left[\int_{-\infty}^{\infty}g^{(k)}(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\right]^2 \tag{6.16}$$

（4）在（2）结果的基础上，求式（6.15）两边的不定积分，然后再用边界条件确定积分常数。经 k 次积分后，可得输出的自相关函数 $R_Y(\tau)$；

（5）求 $R_Y(\tau)$ 的傅里叶变换得功率谱密度 $S_Y(\omega)$。

这种方法的优点是，如果 $g(x)$ 经若干次微分后，能形成 δ 函数，那么式（6.15）右边的积分便大为简化。它的局限性是输入仅限于高斯过程的情况。

（三）多项式变换的矩函数法

多项式变换的矩函数法是将非线性系统的传输特性展开成级数（即多项式），以使系统输出 $Y(t)$ 的矩函数能用输入随机信号的各阶矩函数的线性组合来表示。用这种方法求系统输出均值和自相关函数的步骤如下：

（1）若非线性系统的传输特性 $g(x)$ 在 $x=0$ 处各阶导数存在，则将其按马克劳林级数展开为

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k \tag{6.17}$$

式中

$$b_k=\frac{1}{k!}\left.\frac{d^k g(x)}{dx^k}\right|_{x=0}$$

（2）计算输入 k 阶原点矩 $E[X^k(t)](k=0,1,2,\cdots)$，代入下式得输出均值

$$m_Y=E[Y(t)]=E[g(X(t))]=\sum_{k=0}^{\infty}b_k E[X^k(t)] \tag{6.18}$$

（3）计算输入各阶联合原点矩 $E[X^j(t)X^k(t+\tau)](j,k=0,1,2,\cdots)$，并代入下式，可得输出$Y(t)$的自相关函数

$$R_Y(\tau)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}b_jb_kE[X^j(t)X^k(t+\tau)] \qquad (6.19)$$

（4）求输出自相关函数的傅里叶变换得输出功率谱密度 $S_Y(\omega)$。

这种方法的特点是，非线性系统输出端的统计特性可以用输入随机信号各阶矩函数的线性组合来表示。其缺点是，当展开式中项数超过3项时，计算就显得十分复杂。

（四）包线法

若非线性系统的输入是平稳窄带随机过程，则采用包线法求解该系统输出的均值、方差和自相关函数的步骤如下：

（1）写出输入窄带随机过程的表达式，即

$$X(t)=A(t)\cos[\omega_0t+\varphi(t)]$$

和非线性系统输出表达式

$$Y(t)=g(A(t)\cos[\omega_0t+\varphi(t)])$$

记输出$Y(t)$某时刻t的采样值为

$$Y_t=g(A_t\cos\Phi) \qquad (6.20)$$

式中$\Phi=\omega_0t+\varphi_t$；A_t、φ_t分别为$A(t)$和$\varphi(t)$在某一时刻t的采样值。

（2）将式（6.20）展开成如下的傅里叶级数形式

$$Y_t=\sum_{m=0}^{\infty}g_m(A_t)\cos m\Phi \qquad (6.21)$$

式中$g_m(A_t)$由下式计算

$$g_0(A_t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}g(A_t\cos\Phi)\mathrm{d}\Phi \qquad (6.22)$$

$$g_m(A_t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(A_t\cos\Phi)\cos m\Phi\mathrm{d}\Phi \qquad (6.23)$$

（3）由下式计算输出均值

$$E[Y(t)]=E[g_0(A_t)]=\int_0^{\infty} g_0(A_t)f_A(A_t)\mathrm{d}A_t \tag{6.24}$$

式中$f_A(A_t)$为瑞利分布，其表达式见第五章表5.1。

（4）输出低频分量的方差由下式计算

$$E[g_0^2(A_t)]=\int_0^{\infty} g_0^2(A_t)f_A(A_t)\mathrm{d}A_t \tag{6.25}$$

$$\sigma_L^2=E[g_0^2(A_t)]-E^2[g_0(A_t)] \tag{6.26}$$

（5）计算

$$a_m(\tau)=\iint_0^{\infty} g_m(A_t)g_m(A_{t+\tau})f_A(A_t,A_{t+\tau};\tau)\mathrm{d}A_t\mathrm{d}A_{t+\tau} \tag{6.27}$$

式中$f_A(A_t,A_{t+\tau};\tau)$是包络$A(t)$的二维联合概率密度。把$a_m(\tau)$代入下式得输出的自相关函数

$$R_Y(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m(\tau)\cos m\omega_0\tau \tag{6.28}$$

（6）对式（6.28）作傅里叶变换得输出功率谱密度。

利用此法，求解输入为窄带高斯随机过程时的线性包络检波器和平方律包络检波器的输出统计特性相当便利。对于线性包络检波器，输出$Y(t)$表达式为

$$Y(t)=K_dA(t) \tag{6.29}$$

式中K_d为线性包络检波器的传输系数。输出的均值为

$$E[Y(t)]=K_dE[A(t)]=K_d\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_X \tag{6.30}$$

方差为

$$\sigma_Y^2=K_d^2E[A^2]-K_d^2\{E[A]\}^2=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)(\sigma_XK_d)^2 \tag{6.31}$$

自相关函数

$$R_Y(\tau)=K_d^2R_A(\tau)=K_d^2\iint_0^{\infty}A_tA_{t+\tau}f_A(A_t,A_{t+\tau};\tau)\mathrm{d}A_t\mathrm{d}A_{t+\tau}$$

(6.32)

对于平方律包络检波器，输出$Y(t)$的表达式为

$$Y(t)=bA^2(t) \tag{6.33}$$

式中 b 为常数。输出的均值为

$$E[Y(t)]=bE[A^2(t)]=2b\sigma_X^2 \tag{6.34}$$

输出的方差

$$\sigma_Y^2=b^2E[A^4(t)]-b^2\{E[A^2(t)]\}^2=4b^2\sigma_X^4 \tag{6.35}$$

输出的自相关函数

$$R_Y(\tau)=b^2E[A^2(t)A^2(t+\tau)]$$

$$=b^2\int_0^\infty\int A_t^2A_{t+\tau}^2f_A(A_t,A_{t+\tau};\tau)\mathrm{d}A_t\mathrm{d}A_{t+\tau} \tag{6.36}$$

（五）例解

〔例6.3〕 设整流设备的传输特性为

$$y=g(x)=|x|$$

如图 6.7 所示。输入是均值、方差和相关函数分别为零、σ^2 和 $R_X(\tau)$的平稳高斯噪声，求该整流设备输出的均值和自相关函数。

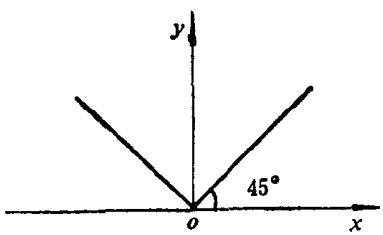


图 6.7 整流设备的传输特性

解：方法 1：采用直接法求解。

（1）写出输入随机信号的一维和二维概率密度。一维概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$$

二维概率密度为

$$f_X(x_1,x_2;\tau)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{x_1^2-2rx_1x_2+x_2^2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right\}$$

式中$r=R_X(\tau)/\sigma^2$，x_1和x_2分别是$X(t)$和$X(t+\tau)$的取值。

（2）求输出均值。根据式（6.6），有

$$E[Y(t)]=E[|X(t)|]=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_X(x)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

（3）求输出的自相关函数

$$R_Y(\tau)=E[Y(t)Y(t+\tau)]=E[|X(t)|\cdot|X(t+\tau)|]$$

$$=\iint_{-\infty}^{\infty}|x_1|\cdot|x_2|f_X(x_1,x_2;\tau)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$=\iint_{-\infty}^{\infty}|x_1x_2|f_X(x_1,x_2;\tau)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$=2\iint_0^{\infty}x_1x_2\cdot\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{x_1^2-2rx_1x_2+x_2^2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right\}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

$$+2\iint_0^{\infty}x_1x_2\cdot\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{x_1^2+2rx_1x_2+x_2^2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

下面计算上式中的两个二重积分，记第一个二重积分为I_1，第二个二重积分为I_2，并令

$$u_i=\frac{x_i}{\sqrt{2\sigma^2(1-r^2)}},\quad i=1,2$$

则有

$$I_1=2\iint_0^{\infty}(\sqrt{2\sigma^2(1-r^2)}\,u_1)\cdot(\sqrt{2\sigma^2(1-r^2)}\,u_2)$$

$$\times\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}}\exp\{-u_1^2-u_2^2+2ru_1u_2\}$$

$$\times(\sqrt{2\sigma^2(1-r^2)}\,du_1)\ (\sqrt{2\sigma^2(1-r^2)}\,du_2)$$

$$=\frac{4\sigma^2}{\pi}(1-r^2)^{3/2}\int_0^\infty\int_0^\infty u_1u_2\exp\{-u_1^2-u_2^2+2ru_1u_2\}du_1du_2$$

因$|r|\leqslant 1$，可设$-r=\cos\psi$，根据公式

$$\int_0^\infty\int_0^\infty xy\exp\{-x^2-y^2-2xy\cos\psi\}dxdy$$

$$=\frac{1}{4}\csc^2\psi(1-\psi\operatorname{ctg}\psi),\quad 0\leqslant\psi\leqslant 2\pi$$

$$I_1=\frac{4\sigma^2}{\pi}(1-r^2)^{3/2}\cdot\frac{1}{4}\csc^2\psi(1-\psi\operatorname{ctg}\psi)$$

$$=\frac{\sigma^2}{\pi}(1-r^2)^{3/2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2$$

$$\times\left[1-\frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}\arccos(-r)\right]$$

$$=\frac{\sigma^2}{\pi}[(1-r^2)^{1/2}+r\arccos(-r)]$$

同理

$$I_2=\frac{\sigma^2}{\pi}[(1-r^2)^{1/2}-r\arccos r]$$

把I_1和I_2代入$R_Y(\tau)$中，得

$$R_Y(\tau)=I_1+I_2$$

$$=\frac{\sigma^2}{\pi}[(1-r^2)^{1/2}+r\arccos(-r)]$$

$$+\frac{\sigma^2}{\pi}[(1-r^2)^{1/2}-r\arccos r]$$

$$=\frac{\sigma^2}{\pi}[2(1-r^2)^{1/2}+r\arccos(-r)-r\arccos r]$$

$$=\frac{\sigma^2}{\pi}[2(1-r^2)^{1/2}+r(\pi-\arccos r)-r\arccos r]$$

$$=\frac{\sigma^2}{\pi}[2(1-r^2)^{1/2}+r(\pi-2\arccos r)]$$

$$=\frac{\sigma^2}{\pi}\left[2(1-r^2)^{1/2}+r\left(\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin r\right)\right)\right]$$

$$=\frac{\sigma^2}{\pi}[2(1-r^2)^{1/2}+r(\pi-\pi+2\arcsin r)]$$

$$=\frac{2\sigma^2}{\pi}[(1-r^2)^{1/2}+r\arcsin r]$$

上式的计算过程中用了下列两个公式

$$\arccos x+\arccos y=\arccos[xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}]$$

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

方法 2：采用普赖斯方法。

（1）对传输特性求导，以便得到比较简单的形式。$g(x)$的一阶导数为

$$\frac{dg(x)}{dx}=\frac{d|x|}{dx}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

如图6.8所示。$\frac{dg(x)}{dx}$也可表示为$\frac{dg(x)}{dx}=2U(x)-1$。 则

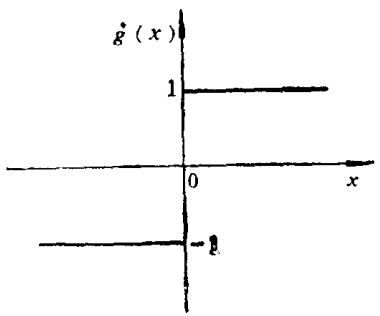


图 6.8 $\dot{g}(x)$的图形

有

$$\frac{\mathrm{d}^2 g(x)}{\mathrm{d}x^2}=2\delta(x)$$

（2）把上式代入式（6.15）中，并求右边的积分，即

$$\frac{\partial^2 R_Y(\tau)}{\partial r^2}=\frac{\sigma^2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\iint_{-\infty}^{\infty}2\delta(x_1)\cdot 2\delta(x_2)$$

$$\times\exp\left\{-\frac{x_1^2-2rx_1x_2+x_2^2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\frac{2\sigma^2}{\pi\sqrt{1-r^2}}\quad(6.37)$$

（3）求边界条件。根据式（6.16），有

$$\left.\frac{\partial R_X(\tau)}{\partial r}\right|_{r=0}=\sigma^2\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\right]^2$$

$$=\sigma^2\left[\int_{-\infty}^{0}(-1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\right]^2$$

$$=\sigma^2\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=0$$

$$R_Y(\tau)|_{r=0}=E[|X(t)|\cdot|X(t+\tau)|]|_{r=0}$$

$$=E[|X(t)|]\cdot E[|X(t+\tau)|]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma=\frac{2}{\pi}\sigma^2$$

（4）解微分方程。对式（6.37）两边进行积分得

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial r}=\int\frac{2\sigma^2}{\pi\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r=\frac{2\sigma^2}{\pi}\arcsin r+C_1$$

$$\left.\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial r}\right|_{r=0}=C_1$$

即$C_1=0$。于是

$$\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial r}=\frac{2\sigma^2}{\pi}\arcsin r$$

对上式再进行积分，得

$$R_Y(\tau)=\frac{2\sigma^2}{\pi}\int \arcsin r\,dr$$

$$=\frac{2\sigma^2}{\pi}\left[\sqrt{1-r^2}+r\arcsin r\right]+C_2$$

代入边界条件有

$$R_Y(\tau)\big|_{r=0}=\frac{2\sigma^2}{\pi}+C_2$$

即

$$\frac{2\sigma^2}{\pi}+C_2=\frac{2\sigma^2}{\pi}$$

得$C_2=0$。最后得

$$R_Y(\tau)=\frac{2\sigma^2}{\pi}\left[\sqrt{1-r^2}+r\arcsin r\right]$$

下面就该题的结果作几点说明：

（1）该系统的输入是零均值，而其输出均值不为零，因此对于一般无记忆非线性系统而言，尽管其输入均值为零，但其输出均值不一定为零。然而，对于线性系统而言，只要其输入均值为零，那么其输出均值一定为零。

（2）该题的$g(x)$表示的就是理想双向限幅器的传输特性，因此当零均值高斯噪声为其输入时，其输出的自相关函数为$\frac{2}{\pi}\arcsin r$

（3）从该例看出，普赖斯方法优于直接法。

为便于应用，我们把四种常用器件的输出统计特性列在表6.1中。

〔例6.4〕 某电压比较器如图6.9*a*所示。它是连接模拟电路与数字电路的一种中间电路，其理想输出-输入特性如图6.9*c*所示。它的输入电压通常是模拟量，输出电压则为数字量，如图6.9*b*、*d*所示。今设电压比较器的输入$X(t)$为广义平稳过程，x_0为一直流电压，求输出的均值$E[Y(t)]$和自相关函数$R_Y(\tau)$。

解：(1) 写出传输特性

$$y=g(x)\begin{cases}3.3, & x>x_0\\ 0, & x\leqslant x_0\end{cases}$$

表 6.1　四种常用器件的输出统计特性

输入统计特性	零均值、σ_x^2方差、自相关函数为$R_x(\tau)$的平稳高斯随机信号			
输出统计特性 ＼ 器件名称 ＼ 非线性特性	平方律器件	全波整流器件	半波整流器件	双向硬限幅器
	$y=bx^2$	$y=\lvert x\rvert$	$y=bx\nu(x)$	$y=\begin{cases}1, x\geqslant 0\\ -1, x<0\end{cases}$
均　值	$b\sigma_x^2$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_x$	$b\sigma_x/\sqrt{2\pi}$	0
方　差	$2b^2\sigma_x^4$	$(1-\frac{2}{\pi})\sigma_x^2$	$\frac{b^2\sigma_x^2}{2}\left(1-\frac{1}{\pi}\right)$	1
自相关函数	$b^2\sigma_x^4+2b^2R_x^2(\tau)$	$\frac{2\sigma_x^2}{\pi}\{[1-r_x^2(\tau)]^{\frac{1}{2}}+r_x(\tau)\arcsin r_x(\tau)\}$	$\frac{b^2\sigma_x^2}{2\pi}\{[1-r^2x(\tau)]^{\frac{1}{2}}+r_x\arccos[-r_x(\tau)]\}$	$\frac{2}{\pi}\arcsin r_x(\tau)$

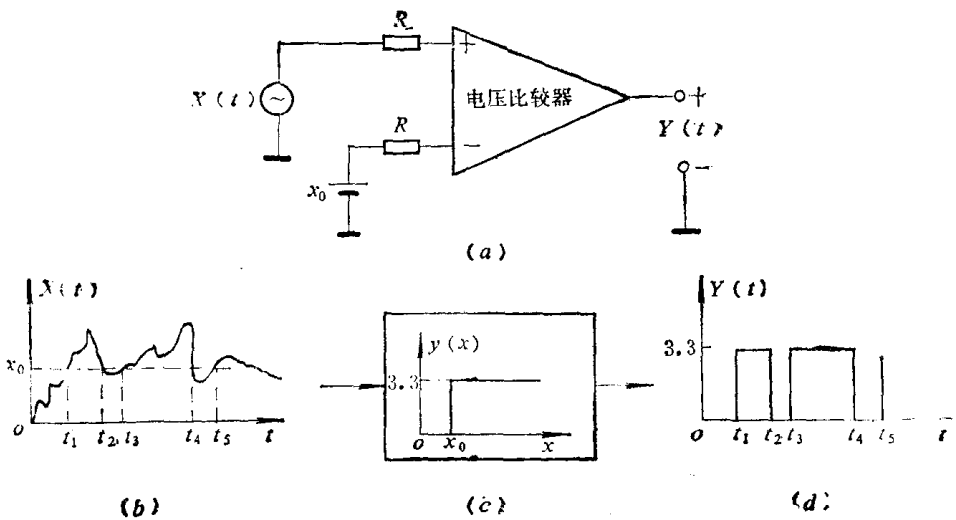


图 6.9

（a）电压比较器；（b）输入过程的某个样本函数；
（c）输出-输入特性；（d）输出过程的某个样本函数

即当输入随机信号为$X(t)$时，输出的随机信号为

$$Y(t)=\begin{cases}3.3, & X(t)>x_0\\ 0, & X(t)\leqslant x_0\end{cases}$$

（2）求均值$E[Y(t)]$。$Y(t)$只能取“3.3”或者“0”，并且

$$P\{Y(t)=3.3\}=P\{X(t)>x_0\}$$

$$P\{Y(t)=0\}=P\{X(t)\leqslant x_0\}$$

因此 $E[Y(t)]=3.3P\{Y(t)=3.3\}+0\cdot P\{Y(t)=0\}$

$$=3.3P\{X(t)>x_0\}=3.3[1-F_X(x_0)]$$

（3）求$R_Y(\tau)$。

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=E[Y(t)Y(t+\tau)]\\&=(3.3)\cdot(3.3)P\{Y(t)=3.3,\ Y(t+\tau)=3.3\}\\&\quad+(3.3)\cdot 0\cdot P\{Y(t)=3.3,\ Y(t+\tau)=0\}\\&\quad+0\cdot(3.3)P\{Y(t)=0,\ Y(t+\tau)=3.3\}\\&\quad+0\cdot 0P\{Y(t)=0,\ Y(t+\tau)=0\}\\&=10.89P\{Y(t)=3.3,\ Y(t+\tau)=3.3\}\\&=10.89P\{X(t)>x_0,\ X(t+\tau)>x_0\}\\&=10.89[1-F_X(x_0,x_0;\tau)]\end{aligned}$$

显然，若已知输入的一维和二维概率分布函数，就能由上面结果直接得出输出过程的均值和自相关函数。此外，如果把图6.9*a*中$X(t)$与x_0的接法互换，并设$X(t)$具有遍历性，再把x_0改成一线性较好的锯齿波发生器，则通过测得电压比较器输出的均值，对其用3.3来除后的结果就是输入$X(t)$的一维分布函数。工程上常用这种方法来测量随机信号的一维分布函数。

〔**例6.5**〕 某接收机中视频部分的方框图见图6.10。图中C_0和C_4为级间耦合电容。已知输入电压$X(t)$为平稳高斯噪声，其均值为零、功率谱密度$S_X(f)=N_0/2$。中放、低通滤波器、视放的幅频特性如图6.11所示。平方器和低通滤波器$H_3(f)$组成一个全波平方律包络检波器。

（1）计算各级输出功率谱密度$S_1(f)$、$S_2(f)$、$S_3(f)$和

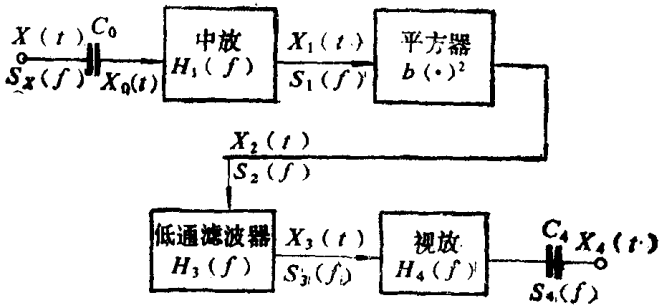


图 6.10 接收机中视频部分方框图

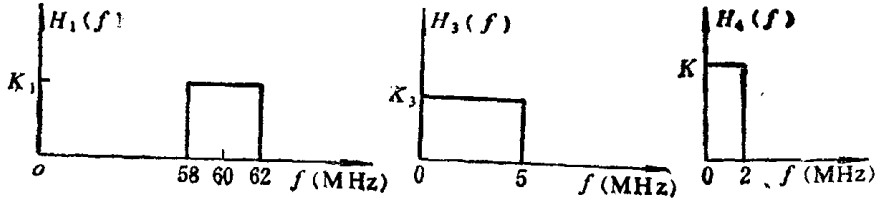


图 6.11 中放、低通滤波器和视放的幅频特性

$S_4(f)$，并图示它们。

（2）求中放、平方器和接收系统的各自输出平均功率。

（3）写出$X_0(t)$、$X_1(t)$和$X_3(t)$的一维概率密度表达式，并指明各属何种分布。

解：(1) 求$S_1(f)$、$S_2(f)$、$S_3(f)$和$S_4(f)$。

已知 $S_X(f)=N_0/2,\ -\infty<f<\infty$

$$|H_1(f)|=\begin{cases}K_1, & |f\pm60|\leqslant2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$|H_3(f)|=\begin{cases}K_3, & |f|\leqslant5\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$|H_4(f)|=\begin{cases}K_4, & |f|\leqslant2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则$X_0(t)$的功率谱密度等于$N_0/2$。于是，中放输出的功率谱密度

$$S_1(f)=|H_1(f)|^2S_{X_0}(f)=\begin{cases}\dfrac{N_0}{2}K_1^2, & |f\pm60|\leqslant2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

如图6.12*b*所示。其方差

$$\sigma_1^2=\int_{-\infty}^{\infty}S_1(f)\mathrm{d}f=2\cdot4\cdot\frac{N_0}{2}K_1^2=4N_0K_1^2$$

因为中放的输入是零均值高斯噪声，所以中放的输出也是零均值的高斯噪声，则平方器的输出自相关函数为

$$R_{X_2}(\tau)=E[b^2X_1^2(t)X_1^2(t+\tau)]=b^2[\sigma_1^4+2R_{X_1}^2(\tau)]$$

输出功率谱密度为

$$\begin{aligned}S_2(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}R_{X_2}(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}b^2[\sigma_1^4+2R_{X_1}^2(\tau)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&=b^2\sigma_1^4\delta(f)+2b^2\int_{-\infty}^{\infty}S_1(f')S_1(f-f')\mathrm{d}f'\\&=b^2\sigma_1^4\delta(f)+\begin{cases}N_1(4-|f|), & |f|\leqslant4\\\dfrac{1}{2}N_1(4-||f|-120|), & 116\leqslant|f|\leqslant124\\0, & \text{其它}\end{cases}\end{aligned}$$

式中$N_1=b^2N_0^2K_1^4$。$S_2(f)$的图形如图6.12*c*所示。

低通滤波器的输出功率谱密度为

$$S_3(f)=|H_3(f)|^2S_2(f)=\begin{cases}K_3^2b^2\sigma_1^4\delta(f)+K_3^2N_1(4-|f|), & |f|\leqslant4\\0, & \text{其它}\end{cases}$$

如图6.12*d*所示，图中$N_3'=K_3^2b^2\sigma_1^4$、$N_3=K_3^2N_1$。

视放输出的功率谱密度为

$$\begin{aligned}S_4(f)&=|H_4(f)|^2S_3(f)\\&=\begin{cases}K_4^2K_3^2b^2\sigma_1^4\delta(f)+K_4^2K_3^2N_1(4-|f|), & |f|\leqslant2\\0, & \text{其它}\end{cases}\end{aligned}$$

$S_4(f)$的图形如图6.12*e*所示。图中$N_4=4K_4^2K_3^2N_1$，$N_4'=K_4^2K_3^2\times b^2\sigma_1^4$。

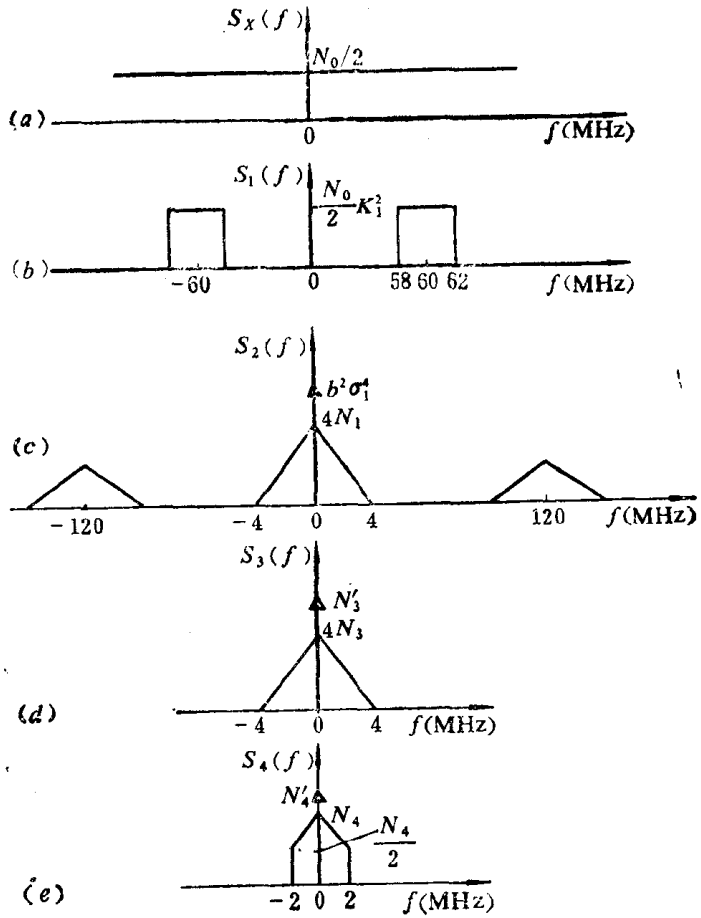


图 6.12 (a)$S_X(f)$; (b)$S_1(f)$; (c)$S_2(f)$; (d)$S_3(f)$; (d)$S_4(f)$

（2）中放的输出平均功率

$$\sigma_1^2=4N_0K_1^2$$

平方器输出的平均功率为

$$E[X_2^2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}S_2(f)\mathrm{d}f=48b^2N_0^2K_1^4$$

接收系统输出的平均功率为

$$\sigma_4^2=\int_{-\infty}^{\infty}S_4(f)\mathrm{d}f=12N_4=28b^2N_0^2K_4^2K_8^2K_1^4$$

（3）$X_0(t)$ 为高斯噪声，其一维概率密度为

$$f_{X0}(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}e^{-x_0^2/2\sigma_0^2}$$

式中 $\sigma_0^2=N_0/2$。

$X_1(t)$ 是零均值的高斯噪声，其一维概率密度为

$$f_{X_1}(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-x_1^2/2\sigma_1^2}$$

因为中放的中心频率60MHz大于其带宽4MHz，所以中放为窄带系统，则当白噪声$X_0(t)$ 通过中放时，其输出为高斯窄带随机过程，其时域表达式为

$$X_1(t)=A(t)\cos(\omega_0 t+\varphi(t))$$

式中 $A(t)$ 为 $X_1(t)$ 的包络，它的一维概率密度为

$$f_A(A_t)=\frac{A_t}{\sigma_1^2}\exp\left\{-\frac{A_t^2}{2\sigma_1^2}\right\},\quad A_t\geqslant 0$$

平方器的输出

$$X_2(t)=bX_1^2(t)=\frac{1}{2}bA^2(t)+\frac{1}{2}b\cos 2[\omega_0 t+\varphi(t)]$$

其经低通滤波器后，滤除了上式第二项，得

$$X_3(t)=\frac{1}{2}K_3bA^2(t)$$

其一维概率密度为

$$f_{X_3}(x_3)=\frac{1}{K_3b\sigma_1^2}\exp\left(-\frac{x_3}{K_3b\sigma_1^2}\right),\quad x_3\geqslant 0$$

它是指数分布。

〔**例6.6**〕 设$X(t)$ 和$Y(t)$ 是具有零均值和互相关函数为

$$R_{XY}(\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]$$

的两个联合平稳高斯过程。设$Z(t)$ 是$Y(t)$ 的多项式函数即

$$Z(t)=\sum_{k=1}^{n}a_kY^k(t)$$

试说明除了常系数之外，$R_{XZ}(\tau)$ 是和$R_{XY}(\tau)$ 相同的。

解：下面解题时要用到这样的结论：设 $X(t)$ 是零均值的高

斯过程，则有

$$E[X(t_1)\ X(t_2)\ \cdots\ X(t_n)]$$
$$=\begin{cases}0, & n\text{为奇数}\\ \sum\{E[X(t_{i_1})X(t_{i_2})]\cdots E[X(t_{i_{n-1}})X(t_{i_n})]\}, & n\text{为偶数}\end{cases}$$

该式的求和是对所有下标不同的对进行求和，其总项数为

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)2^{n/2}}$$

现在来解该题。

$$R_{XZ}(\tau)=E[X(t)Z(t+\tau)]=E\left[X(t)\sum_{k=1}^{n}a_kY^k(t+\tau)\right]$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_kE[X(t)Y^k(t+\tau)]$$

考虑到

$$E[X(t)Y^k(t+\tau)]=E[X(t)\underbrace{Y(t+\tau)\cdots Y(t+\tau)}_{k\text{个}}]$$

及$X(t)$和$Y(t)$是零均值的两个联合高斯过程，利用上面的结论，我们知道，如果$(k+1)$是奇数则

$$E[X(t)Y^k(t+\tau)]=0$$

如果$(k+1)$是偶数，则

$$E[X(t)Y^k(t+\tau)]=\Sigma\{E[X(t)Y(t+\tau)]$$
$$\cdot\underbrace{E[Y(t+\tau)Y(t+\tau)]\cdots E[Y(t+\tau)Y(t+\tau)]}_{(k-1)/2\text{个}}\}$$
$$=\Sigma\left\{R_{XY}(\tau)\cdot(\sigma_Y^2)^{(k-1)/2}\right\}$$

上式求和的总项数为$\frac{(k+1)!}{\left(\frac{k+1}{2}\right)!2^{(k+1)/2}}$，于是

$$E[X(t)Y^k(t+\tau)]=\frac{(k+1)!}{\left(\frac{k+1}{2}\right)!2^{(k+1)/2}}\cdot\sigma_Y^{k-1}R_{XY}(\tau)$$

因此

$$R_{XZ}(\tau)=\sum_{\substack{k=1\\k\neq\text{偶数}}}^{n} a_k\cdot\frac{(k+1)!}{\left(\frac{k+1}{2}\right)!2^{(k+1)/2}}\cdot\sigma_Y^{k-1}R_{XY}(\tau)$$

$$=R_{XY}(\tau)\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq\text{偶数}}}^{n} a_k\sigma_Y^{k-1}\frac{(k+1)!}{\left(\frac{k+1}{2}\right)!2^{(k+1)/2}}\right]$$

显然，除了上式中的求和项外，$R_{XZ}(\tau)$ 与$R_{XY}(\tau)$ 是相同的。

〔例6.7〕 设某非线性系统的传输特性为

$$y=\beta a^x \qquad (a>0)$$

其输入$X(t)$ 为零均值的平稳高斯噪声，它的方差为 σ_X^2，相关函数为 $R_X(\tau)$。试用多项式矩函数法求输出的自相关函 数 （$g(x)$ 只取前三项）。

解：将βa^x展成级数

$$y=\beta a^x=\beta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^k}{k!}x^k$$

取其前三项有

$$y\approx\beta\left[1+\ln a\cdot x+\frac{(\ln a)^2}{2}x^2\right]=\beta[1+a_1x+a_2x^2]$$

式中$a_1=\ln a$，$a_2=(\ln a)^2/2$。

系统输出的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=E[Y(t)Y(t+\tau)]\\&\approx E[\beta(1+a_1X(t)+a_2X^2(t))\cdot\beta(1+a_1X(t+\tau)\\&\quad+a_2X^2(t+\tau))]\\&=\beta^2\{1+a_1E[X(t+\tau)]+a_1E[X(t)]+a_2E[X^2(t+\tau)]\\&\quad+a_2E[X^2(t)]+a_1^2E[X(t)X(t+\tau)]\\&\quad+a_1a_2E[X(t)X^2(t+\tau)]+a_1a_2E[X^2(t)X(t+\tau)]\\&\quad+a_2^2E[X^2(t)X^2(t+\tau)]\}\end{aligned}$$

因为$X(t)$ 是零均值的平稳高斯噪声，所以

$$E[X(t)]=E[X(t+\tau)]=0$$

$$E[X(t)X^2(t+\tau)]=E[X^2(t)X(t+\tau)]=0$$

$$E[X^2(t)]=E[X^2(t+\tau)]=\sigma_X^2$$

$$E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau)$$

$$E[X^2(t)X^2(t+\tau)]=\sigma_X^4+2R_X^2(\tau)$$

则 $$R_Y(\tau)\approx\beta^2[1+a_1\sigma_X^2+a_2\sigma_X^2+a_1^2R_X(\tau)+a_2^2(\sigma_X^4+2R_X^2(\tau))]$$

$$=\beta^2[1+(a_1+a_2)\sigma_X^2+a_2^2\sigma_X^4+a_1^2R_X(\tau)+2a_2^2R_X^2(\tau)]$$

〔例6.8〕 在例6.3中，若输入$X(t)$是零均值的高斯窄带随机信号，求输出低频直流功率、低频总平均功率和低频起伏功率。

解：输入窄带过程可表示为

$$X(t)=A(t)\cos[\omega_0t+\varphi(t)]$$

t时刻的输出为

$$Y_t=|A_t\cos\psi_t|=g_0(A_t)+g_1(A_t)\cos\psi_t+g_2(A_t)\cos 2\psi_t+\cdots$$

式中$\psi_t=\omega_0t+\varphi_t$，$g_0(A_t)$为低频成分，令$I_0=g_0(A_t)$。于是

$$I_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}g(A_t\cos\psi_t)\,\mathrm{d}\psi_t=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|A_t\cos\psi_t|\,\mathrm{d}\psi_t$$

$$=\frac{1}{\pi}A_t\int_0^{\pi}|\cos\psi_t|\,\mathrm{d}\psi_t=\frac{2}{\pi}A_t\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi_t\,\mathrm{d}\psi_t$$

$$=\frac{2}{\pi}A_t$$

低频分量的均值为

$$E[I_0]=\frac{2}{\pi}E[A_t]=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A_tf_A(A_t)\,\mathrm{d}A_t$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}A_t\cdot\frac{A_t}{\sigma_X^2}\mathrm{e}^{-A_t^2/2\sigma_X^2}\,\mathrm{d}A_t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_X$$

则有

$$\text{输出低频直流功率}=(E[I_0])^2=\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_X\right)^2=\frac{2}{\pi}\sigma_X^2$$

$$\text{输出低频总功率}=E[I_0^2]=E\left[\frac{4}{\pi^2}A_t^2\right]$$

$$=\frac{4}{\pi^2}E[A_t^2]=\frac{4}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}A_t^2f_A(A_t)\,\mathrm{d}A_t$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty} A_i^2 \cdot \frac{A_i}{\sigma_X^2} e^{-A_i^2/2\sigma_X^2}\, dA_i$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\cdot 2\sigma_X^2=\frac{8}{\pi^2}\sigma_X^2$$

输出低频起伏功率$=\sigma_{I_0}^2=E[I_0^2]-(E[I_0])^2$

$$=\frac{8}{\pi^2}\sigma_X^2-\frac{2}{\pi}\sigma_X^2=\frac{2\sigma_X^2}{\pi^2}(4-\pi)$$

三、非线性系统输出信噪比的计算

（一）信噪比的计算原则

一般说来，信号和噪声同时作用于非线性系统的输入端，其输出平均功率由三部分组成：

$(Q_S)_o$——信号自身各频率分量间差拍所得到的输出平均功率；

$(Q_N)_o$——噪声自身各频率分量间差拍所得到的输出平均功率；

$(Q_{SN})_o$——信号与噪声各频率分量间差拍所得到的输出平均功率。

对于通信系统中的非线性系统，计算其输出信噪比的公式为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{(Q_S)_o}{(Q_N)_o+(Q_S)_o} \tag{6.38}$$

对于雷达中的非线性系统，计算其输出信噪比的公式为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{(Q_S)_o+(Q_{SN})_o}{(Q_N)_o} \tag{6.39}$$

（二）例解

〔例6.9〕 某接收机的包络检波器如图 6.13 所示。设窄带中放的幅频特性为

$$|H(f)|=\begin{cases}K, & |f\pm f_0|\leqslant\dfrac{\Delta f}{2}\\ 0，\text{其它}\end{cases}$$

其输入为$S_i(t)+N_i(t)$，其中信号为

$$S_i(t)=A[1+mx(t)]\cos\omega_0 t,\quad 0\leqslant m\leqslant 1,\quad |x(t)|\leqslant 1$$

$x(t)$ 是零均值的遍历随机信号，它包含了有用的信息。$N_i(t)$ 是功率谱密度为 $N_0/2$ 的白噪声。再设包络检波器的传输系数为 K_d，试求检波器的输出信噪比。

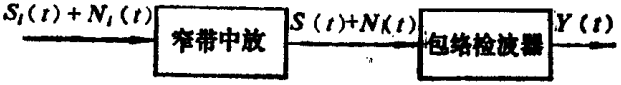


图 6.13 包络检波器

解：窄带中放的输出信号为

$$S(t)=KS_i(t)=KA[1+mx(t)]\cos\omega_0 t$$

$N_i(t)$ 通过窄带中放后的输出 $N(t)$ 是窄带高斯噪声，其表达式为

$$N(t)=a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t$$

若包络检波器的输入记为$Z(t)$，则

$$\begin{aligned}Z(t)&=S(t)+N(t)=KA[1+mx(t)]\cos\omega_0 t\\&\quad+a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t\\&=\{KA[1+mx(t)]+a(t)\}\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t\\&=\{[KA(1+mx(t)+a(t)]^2+b^2(t)\}^{1/2}\cos[\omega_0 t+\varphi(t)]\\&=A(t)\cos[\omega_0 t+\varphi(t)]\end{aligned}$$

式中

$$A(t)=\{[KA(1+mx(t))+a(t)]^2+b^2(t)\}^{1/2}$$

$$\varphi(t)=\operatorname{arctg}\frac{b(t)}{KA[1+m_x(t)]+a(t)}$$

于是，包络检波器的输出为

$$Y(t)=K_dA(t)$$

其平均功率为

$$\begin{aligned}E[Y^2(t)]&=K_d^2E[A^2(t)]\\&=K_d^2E\{[KA(1+mx(t)]+a(t)]^2+b^2(t)\}\\&=K_d^2\{K^2A^2+2K^2A^2mE[x(t)]\\&\quad+K^2A^2m^2E[x^2(t)]+2KAE[a(t)]\end{aligned}$$

$$+2KAmE[x(t)]E[a(t)]$$
$$+E[a^2(t)]+E[b^2(t)]\}$$

式中

$$E[x(t)]=0,\quad E[a(t)]=0$$

$$E[a^2(t)]=E[b^2(t)]=E[N^2(t)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\cdot\frac{N_0}{2}\mathrm{d}f=2\int_{f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{f_0+\frac{\Delta f}{2}}K^2\cdot\frac{N_0}{2}\mathrm{d}f$$

$$=K^2N_0\Delta f$$

从而

$$E[Y^2(t)]=K_d^2\{K^2A^2+K^2A^2m^2E[x^2(t)]+2E[a^2(t)]\}$$

式中第一、二项是信号的平均功率，第三项是噪声的平均功率，即

$$(Q_S)_o=K_d^2K^2A^2\{1+m^2E[x^2(t)]\}$$

$$(Q_N)_o=2K_d^2E[a^2(t)]=2K_d^2K^2N_0\Delta f$$

最后得检波器的输出信噪比

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\frac{(Q_S)_o}{(Q_N)_o}=\frac{A^2\{1+m^2E[x^2(t)]\}}{2N_0\Delta f}$$

读者可进一步证明，包络检波器的输出信噪比与输入信噪比之间的关系为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o=\left(\frac{S}{N}\right)_i$$

〔**例6.10**〕 某接收机的平方律检波器如图6.14所示。已知条件见例6.9，并设$m=0$、检波器输出与其输入包络平方的比例系数为K_d。试求平方律检波器的输出信噪比。

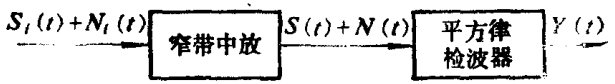


图 6.14 平方律检波器

解：平方律检波器的输入为

$$Z(t)=S(t)+N(t)$$

$$=KA\cos\omega_0 t+a(t)\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t$$
$$=[KA+a(t)]\cos\omega_0 t-b(t)\sin\omega_0 t$$
$$=A(t)\cos[\omega_0 t+\varphi(t)]$$

式中
$$A(t)=\{[KA+a(t)]^2+b^2(t)\}^{1/2}$$
$$\varphi(t)=\text{arctg}\frac{b(t)}{KA+a(t)}$$

于是，平方律检波器的输出为

$$Y(t)=K_d A^2(t)=K_d[(KA+a(t))^2+b^2(t)]$$

其平均功率为

$$E[Y^2(t)]=K_d^2 E\{[(KA+a(t))^2+b^2(t)]^2\}$$
$$=K_d^2\{K^4A^4+4K^3A^3E[a(t)]+6K^2A^2E[a^2(t)]$$
$$+4KAE[a^3(t)]+E[a^4(t)]+2K^2A^2E[b^2(t)]$$
$$+4KAE[a(t)b^2(t)]+2E[a^2(t)b^2(t)]+E[b^4(t)]\}$$

利用窄带高斯噪声的统计特征及$a(t)$ 与$b(t)$ 是统计独立 的，有

$$E[a(t)]=0,\quad E[a^2(t)]=E[b^2(t)]=K^2N_0\Delta f$$
$$E[a^3(t)]=0,\quad E[a(t)b^2(t)]=E[a(t)]E[b^2(t)]=0$$
$$E[a^2(t)b^2(t)]=E[a^2(t)]E[b^2(t)]=(E[a^2(t)])^2$$
$$E[a^4(t)]=E[b^4(t)]=3(E[a^2(t)])^2$$

把以上结果代入$E[Y^2(t)]$表达式中，得到

$$E[Y^2(t)]=K_d^2\{K^4A^4+8K^2A^2E[a^2(t)]+8(E[a^2(t)])^2\}$$

其中
$$(Q_S)_o=K_d^2K^4A^4$$
$$(Q_N)_o=8K_d^2(E[a^2(t)])^2=8K_d^2(K^2N_0\Delta f)^2$$
$$(Q_{SN})_o=8K_d^2K^2A^2E[a^2(t)]=8K_d^2K^4A^2N_0\Delta f$$

下面分别讨论该检波器用于通信系统和雷达中的情况。

（1）若该检波器用于通信系统中，则检波器的输出信噪比为

$$(S/N)_o=\frac{(Q_S)_o}{(Q_N)_o+(Q_{SN})_o}$$
$$=\frac{K_d^2K^4A^4}{8K_d^2(K^2N_0\Delta f)^2+8K_d^2K^4A^2N_0\Delta f}$$

$$=\frac{A^4}{8N_0\Delta f(N_0\Delta f+A^2)}$$

读者还可以证明，此时检波器的输出信噪比与输入信噪比之间的关系是

$$(S/N)_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{(S/N)_i^2}{1+2(S/N)_i}$$

当 $(S/N)_i\gg1$时，根据上式则有

$$(S/N)_0\approx\frac{1}{4}(S/N)_i$$

当 $(S/N)_i\ll1$时，则有

$$(S/N)_0\approx\frac{1}{2}(S/N)_i^2$$

于是，我们得出结论：当检波器输入信噪比足够大时，则输出信噪比与输入信噪比成正比；当输入信噪比很小时，则输出信噪比与输入信噪比的平方成正比。

（2）若该检波器用于雷达中，则检波器的输出信噪比为

$$(S/N)_0=\frac{(Q_S)_0+(Q_{SN})_0}{(Q_N)_0}=\frac{A^4+8A^2N_0\Delta f}{8(N_0\Delta f)^2}$$

读者可证明，输出信噪比与输入信噪比之间的关系是

$$(S/N)_0=\frac{1}{2}(S/N)_i^2+2(S/N)_i$$

Ⅲ．习　　题

6—1　给定两个无惰性非线性系统的传输特性为

$$Y_1(t)=g_1[X_1(t)]\qquad Y_2(t)=g_2[X_2(t)]$$

证明：若输入随机信号$X_1(t)$和$X_2(t)$统计独立，则输出$Y_1(t)$和$Y_2(t)$也是统计独立的。

6—2　设无惰性的时不变非线性系统的输出为$Y(t)=g[X(t)]$。证明：若输入$X(t)$是狭义平稳的随机信号，则输出$Y(t)$也是狭义平稳的随机信号。

6—3　设非线性系统的传输特性为

$$y = be^{x},\quad b>0$$

输入$X(t)$是一个具有均值为m、方差为σ^2的平稳高斯噪声。求：（1）输出$Y(t)$的一维概率密度；（2）输出$Y(t)$的数学期望和方差。

6—4　在题6—3中，当$b=2$，且输入端作用的$X(t)$为零均值平稳高斯噪声时，采用直接法求输出的自相关函数$R_Y(\tau)$。

6—5　已知隧道二极管的电压电流关系为

$$y=g(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -a, & x<0 \end{cases}$$

其中a为正常数。设输入噪声电流$X(t)$的一维概率密度为

$$f_X(x)=|x|,\quad |x|\leqslant 1$$

试求输出噪声电压$Y(t)$的一维概率密度$f_Y(y)$。

6—6　一个二极管的两端电压$X(t)$是具有零均值、自相关函数

$R_X(\tau)=\sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}$的平稳高斯噪声，求输出电流

$$Y(t)=I e^{aX(t)}$$

的均值、方差和自相关函数（I和a均为常数）。

6—7　设$Y(t)=|X(t)|$，求零均值高斯随机信号$X(t)$输入时，$Y(t)$的一维和二维概率密度。

6—8　已知限幅器的限幅特性为

$$y=a+\frac{1}{K\sigma_L\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2\sigma_L^2}\,dt$$

求服从$N(0,\sigma^2)$分布的高斯噪声被限幅后的一维概率密度。

6—9　设$X(t)$是零均值的平稳高斯噪声，其自相关函数为$R_X(\tau)$，求出无记忆系统$g(x)$，使得$Y(t)=g[X(t)]$在区间$[a,b]$上服从均匀分布。

6—10　设理想双向硬限幅器的传输特性为

$$y=g(x)=\begin{cases} 1, & x\geqslant 0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

输入$X(t)$为零均值、自相关函数为$R_X(\tau)$的平稳高斯噪声。试分别用直接法和特征函数法求该系统输出$Y(t)$的自相关函数。

6—11　设平稳高斯随机信号$X(t)$的均值为零、自相关函数为$R_X(\tau)$、一维概率分布函数为$F_X(x)$。把$X(t)$加到

$$y=F_X(x)-\frac{1}{2}$$

所描述的无记忆系统的输入端，试证明其输出$Y(t)$的自相关函数为

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2\pi}\arcsin\left[\frac{R_X(\tau)}{2R_X(0)}\right]$$

6—12 设无记忆非线性系统的传输特性为$y=g(x)$，其输入是均值为零的平稳高斯过程。

（1）证明该系统的输入输出互相关函数

$$R_{XY}(\tau)=KR_X(\tau)$$

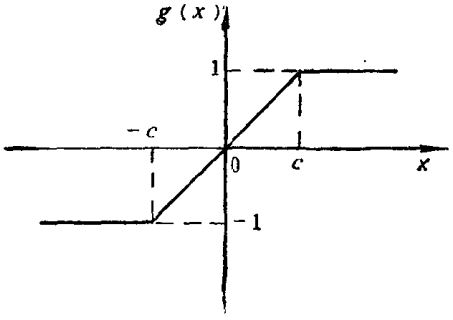
其中 $K=E[g'[X(t)]]$。

（2）若取 $g(x)=\mathrm{sgn}(x)$，则

$$R_{XY}(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi R_X(0)}}R_X(\tau)$$

（3）若$g(x)$如图题6-12所示，则

$$R_{XY}(\tau)=\frac{1}{C}\,\mathrm{erf}\left[\frac{C}{\sqrt{2R_X(0)}}\right]\cdot R_X(\tau)$$



图题 6—12

6—13 已知非线性系统的传输特性为

$$y=g(x)=x^n$$

若其输入的是均值为零、自相关函数为$R_X(\tau)$的平稳高斯噪声，试证该系统输出的自相关函数为

$$R_Y(\tau)=\sum_{k}^{n}\frac{\{n!/[(n-k)/2]!\}^2}{2^{n-k}\cdot k!}R_X^{n-k}(0)R_X^k(\tau)$$

其中当n是偶数时，$k=0,2,4,\cdots$。当n为奇数时，$k=1,3,5,\cdots$。

6—14 已知非线性系统$g(x_1)$、$g(x_2)$各自的输入$X_1(t)$和$X_2(t)$是均值为零的平稳高斯随机信号，$X_1(t)$和$X_2(t)$是联合高斯的。若$Y_1(t)$和

$Y_2(t)$ 分别为两个系统的输出，试证

$$\frac{\partial^k R_{Y_1Y_2}(\tau)}{\partial R^k_{X_1X_2}(\tau)} = E[g_1^{(k)}(x_{11})g_2^{(k)}(x_{22})]$$

其中$x_{11}=X_1(t)$、$x_{22}=X_2(t+\tau)$。

6—15 在题6-13中，若非线性系统的传输特性为

$$y=g(x)$$

试证：$R_Y(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}E[g^{(k)}(x_1)]E[g^{(k)}(x_2)]R_X^k(\tau)$

6—16 试分别应用：（1）题6-13的结论、（2）普赖斯方法、（3）题6-15的结论，证明当$X(t)$为零均值高斯噪声时，$Y(t)=X^2(t)$的自相关函数为

$$R_Y(\tau)=R_X^2(0)+2R_X^2(\tau)$$

6—17 令$Y(t)=X(t)+X^3(t)$，其中$X(t)$是均值为零、自相关函数为$R_X(\tau)$的高斯噪声。试分别用下列方法证明

$$R_Y(\tau)=[1+3R_X(0)]^2R_X(\tau)+6R_X^2(\tau)$$

（1）普赖斯方法；（2）题6-15的结论；（3）把$Y(t)$看成是$Y_1(t)=X(t)$与$Y_2(t)=X^3(t)$之和，应用题6-14的结论。

6—18 已知$X_1(t)$和$X_2(t)$是两个零均值的高斯随机信号，它们的方差分别为$\sigma_{X_1}^2$和$\sigma_{X_2}^2$、互相关函数为$R_{X_1X_2}(\tau)$。把$X_1(t)$和$X_2(t)$分别作用到两个硬限幅器上，求证输出随机信号$Y_1(t)=\mathrm{sgn}[X_1(t)]$与$Y_2(t)=\mathrm{sgn}[X_2(t)]$的互相关函数为

$$R_{Y_1Y_2}(\tau)=\frac{2}{\pi}\arcsin[R_{X_1X_2}(\tau)/\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}]$$

6—19 已知$X_1(t)$和$X_2(t)$是两个零均值的联合高斯随机信号，它们的互相关函数为$R_{X_1X_2}(\tau)$，试证$Y_1(t)=X_1(t)$和$Y_2(t)=A\mathrm{sgn}[X_2(t)]$的互相关函数为

$$R_{Y_1Y_2}(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}A\sigma_{X_2}^{-1}R_{X_1X_2}(\tau)$$

6—20 设平方器件的输入为

$$X(t)=A[1+M(t)]\cos[\omega_0t+\Theta]+N(t)$$

其中$M(t)$是一个均值为零、相关函数为

$$R_M(\tau)=\frac{\sin(\tau/2)}{\tau/2}$$

的高斯过程；Θ的概率密度为

$$f_\Theta(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

噪声$N(t)$是零均值、自相关函数

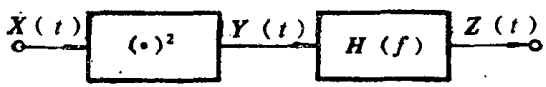
$$R_N(\tau)=N_0B\frac{\sin(B\tau/2)}{B\tau/2}\cos\omega_0\tau$$

的高斯过程。$M(t)$、Θ和$N(t)$是相互统计独立的。试求平方器件（$Y(t)=X^2(t)$）的输出$E[Y(t)]$和$R_Y(\tau)$。

6—21 某系统如图题6-21所示。输入$X(t)$是零均值的平稳高斯过程。试证：

（1） $$S_Y(f)=\left[\int_{-\infty}^{\infty}S_X(f)\mathrm{d}f\right]^2\delta(f)+2S_X(f)*S_X(f)$$

（2） $$D[Z(t)]=2\int_{-\infty}^{\infty}S_X(f)*S_X(f)\cdot|H(f)|^2\mathrm{d}f$$



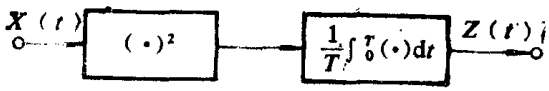
图题 6-21

6—22 某系统如图题6-22所示。设输入$X(t)$为零均值的平稳高斯噪声，其功率谱密度为

$$S_X(f)=\begin{cases}\dfrac{A}{2W}, & |f|\leqslant W\\ 0, & |f|>W\end{cases}$$

（1）证明$E[Z(t)]=A$；

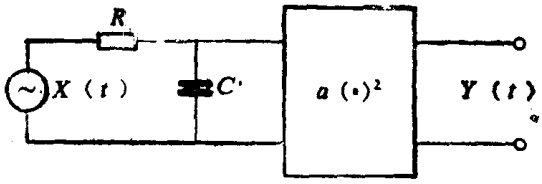
（2）设WT足够大，求$Z(t)$方差的近似表达式。



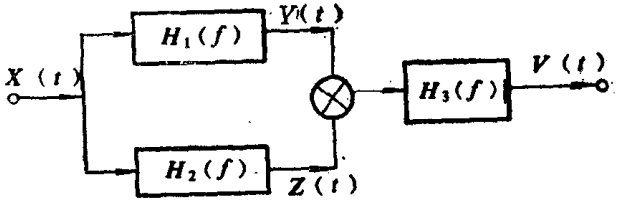
图题 6-22

6—23 某系统如图题6-23所示。输入$X(t)$为高斯白噪声，其功率谱密度$S_X(\omega)=N_0/2$。假设电路本身热噪声可以忽略不计，试求$R_Y(\tau)$和$S_Y(\omega)$。

6—24 某系统如图题6-24所示。设$X(t)$是功率谱密度为N_0的零均值



图题 6—23



图题 6—24

高斯过程。

（1）导出用N_0、τ、$H_1(f)$、$H_2(f)$表示的互相关函数表示式$R_{YZ}(\tau)=E[Y(t)Z(t+\tau)]$。

（2）导出用$H_3(f)$、自相关函数$R_Y(\tau)$、$R_Z(\tau)$和$R_{YZ}(\tau)$表示的$R_V(\tau)=E[V(t)V(t+\tau)]$。

6—25 按照题6-3和6-4的条件，采用多项式矩函数法求输出自相关函数（$g(x)$只取前三项）。

6—26 在题6-3中，令$b=2$，而输入端$X(t)$为

$$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Theta)+N(t)$$

其中a、ω_0是常数，相位Θ为区间$(0,2\pi)$上的均匀分布的随机变量。$N(t)$为零均值平稳高斯噪声。信号与噪声相互独立。试用多项式矩函数法求输出的自相关函数（只取$g(x)$的前三项）。

6—27 某非线性器件的传输特性为

$$y=a_1x+a_3x^3$$

设输入$X(t)$为零均值平稳高斯噪声，其自相关函数为$R_X(\tau)$。求$E[Y(t)]$和$R_Y(\tau)$。

6—28 非线性系统的传输特性为

$$y=4x^2+x+1$$

输入随机过程$X(t)$是个均值为零、方差为“1”的平稳窄带高斯噪声。试

用包线法计算出该系统输出随机过程低频分量的均值和方差。

6—29 非线性设备的输入是

$$X(t)=S(t)+N(t)$$

这里$S(t)$和$N(t)$分别是以零为均值、以σ_{St}^2和σ_{Nt}^2为方差的独立高斯随机信号和高斯噪声。试证明：该系统输出$Y(t)$的自相关函数

$$R_Y(t_1,t_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h_{km}(t_1)h_{km}(t_2)}{k!m!}R_s^m(t_1,t_2)R_N^k(t_1,t_2)$$

式中

$$h_{km}(t_i)=\frac{1}{2\pi j}\int_D F(\omega_i)\omega_i^{k+m}\exp\left[\frac{\omega_i^2}{2}(\sigma_{Si}^2+\sigma_{Ni}^2)\right]d\omega_i\ (i=1,2)$$

其中$F(\omega)$是非线性设备的转移函数。

6—30 设非线性设备的输入是

$$X(t)=\cos(\omega_0 t+\Theta)+a\cos(\Omega t+\Phi)$$

式中，$|\omega_0-\Omega|\ll\omega_0$；$\Theta$和$\Phi$都是在$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量，并且二者独立；$a$为常数。证明该系统输出$Y(t)$的自相关函数可以表示成

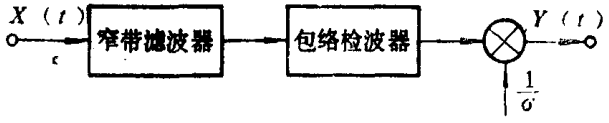
$$R_Y(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_m\varepsilon_k h_{mk}^2\cos(m\omega_0\tau)\cos(k\Omega\tau)$$

式中ε_m和ε_k是聂曼因数，系数h_{mk}由式

$$h_{mk}=\frac{1}{2\pi j}\int_D F(\omega)I_m(\omega)I_k(\omega a)d\omega$$

确定。其中$F(\omega)$是非线性设备的转移函数，$I_m(\cdot)$为m阶修正贝塞尔函数。

6—31 设零均值平稳白噪声$X(t)$通过图题6-31所示的系统。若窄带滤波器的带宽为Δf，其输出平均功率为σ^2，检波器的传输系数$K_d=0.8$，试求$Y(t)$的数学期望和方差。



图题 6—31

6—32 某雷达系统的理想平方律检波器输入的波形为

$$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Theta)+N(t)$$

式中a为常数；相位Θ是在$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量；$N(t)$是均值

为零的平稳高斯噪声，其功率谱密度为

$$S_N(f)=\begin{cases}N_0, & f_0-\dfrac{\Delta f}{2}<|f|<f_0+\dfrac{\Delta f}{2}\\ 0, & \text{其它 } f\end{cases}$$

θ与$N(t)$独立。求输出信噪比，并讨论与输入信噪比的关系。

6—33 某接收系统的简易原理图如图题6-33所示。乘法器和低通滤波器构成一个同步检波器。设窄带中放$H_1(f)$的幅频特性为

$$|H_1(f)|=\begin{cases}K, & |f\pm f_0|\leqslant\Delta f、f_0\gg\Delta f\\ 0, & \text{其它 } f\end{cases}$$

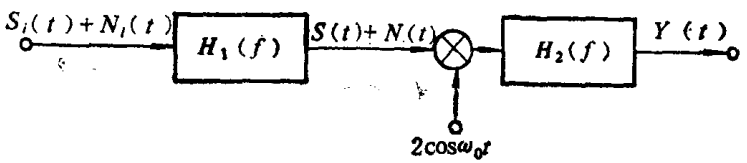
其输入信号$S_i(t)$为

$$S_i(t)=Ax(t)\cos\omega_0 t$$

它是包含有用信息的遍历随机信号，其等效噪声带宽小于Δf。$N_i(t)$是功率谱密度为$N_0/2$的白噪声。低通滤波器$H_2(f)$的幅频特性为

$$|H_2(f)|=\begin{cases}1, & |f|\leqslant\Delta f\\ 0, & \text{其它 } f\end{cases}$$

试求该同步检波器的输出信噪比及其与输入信噪比之间的关系。



图题 6—33

6—34 在题6-33中，令

$$|H_1(f)|=\begin{cases}K, & f_0\leqslant f\leqslant f_0+\Delta f\text{和}-f_0\leqslant f\leqslant\Delta f-f_0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$S_i(t)=\frac{A}{2}x(t)\cos\omega_0 t-\frac{A}{2}\hat{x}(t)\sin\omega_0 t$$

其它条件不变。试求系统输出的信噪比。

6—35 在题6-33中，令

$$S_i(t)=A[1+mx(t)]\cos\omega_0 t$$

$$E[X(t)]=0$$

其它条件不变。试求该系统的输出信噪比。

第七章　几种常用的随机过程

Ⅰ．本章要点

首先，在教材里，本章论及了马尔可夫序列、马尔可夫链及马尔可夫过程的概念及性质；着重介绍了齐次马尔可夫链的一步、n步转移概率和它们的矩阵，并研讨了系统状态的分类、状态空间的分解、状态运动的极限性质。然后，论述了独立增量过程的两个最重要的分支——泊松过程和维纳过程的概念与性质。最后，扼要地介绍了独立随机过程。

本章的重点及其要求：(1)在具体条件下，学会确立马氏链的一步、n步转移概率及其矩阵；对马氏链的状态能够熟练地进行分类，并画出状态传递图；根据马氏链的一步转移概率矩阵，判断何时此链具有遍历性，并能求出极限分布。(2) 灵活掌握泊松过程和维纳过程的定义与性质，学会求解它们的各种数字特征。

Ⅱ．基本内容与例解

一、马尔可夫过程

（一）马尔可夫序列

马尔可夫序列是指时间参数离散、状态连续的马尔可夫过程。

一个随机变量序列$X_n(n=1,2,\cdots)$，若对于任意的n，有

$$F_X(x_n|x_{n-1},x_{n-2},\cdots,x_1)=F_X(x_n|x_{n-1}) \qquad (7.1)$$

或　　$$f_X(x_n|x_{n-1},x_{n-2},\cdots,x_1)=f_X(x_n|x_{n-1}) \tag{7.2}$$

则称X_n为马尔可夫序列。X_n的联合概率密度为

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_X(x_n|x_{n-1})f_X(x_{n-1}|x_{n-2})$$
$$\cdots f_X(x_2|x_1)f_X(x_1) \tag{7.3}$$

马尔可夫序列有如下性质：

（1）一个马尔可夫序列的子序列仍为马尔可夫序列。

（2）$$f_X(x_n|x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{n+k})=f_X(x_n|x_{n+1}) \tag{7.4}$$

（3）$$E[X_n|x_{n-1},\cdots,x_1]=E[X_n|x_{n-1}] \tag{7.5}$$

（4）在一个马尔可夫序列中，若已知现在，则未来与过去相互独立。即

$$f_X(x_n,x_s|x_r)=f_X(x_n|x_r)f_X(x_s|x_r),\quad n>r>s \tag{7.6}$$

（5）若条件概率密度$f_X(x_n|x_{n-1})$与n无关，则称马尔可夫序列是齐次的。

（6）若一个马尔可夫序列是齐次的，且所有的随机变量X_n具有同样的概率密度，则称该马尔可夫序列为平稳的。

（7）马尔可夫序列的转移概率密度满足切普曼-柯尔莫哥洛夫方程，即

$$f_X(x_n|x_s)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x_n|x_r)f_X(x_r|x_s)\mathrm{d}x_r,\quad n>r>s \tag{7.7}$$

（二）马尔可夫链

马尔可夫链是指时间参数、状态皆为离散的马尔可夫过程。

1．马尔可夫链的定义　设$X_n(n=1,2,\cdots)$为离散时间随机过程，其状态空间$I=\{a_1,a_2,\cdots,a_N\}$。如果过程在t_{m+k}时刻为任一状态$a_{i_{m+k}}(i=1,2,\cdots,N)$的概率，只与过程在$t_m$时刻的状态有关，而与过程在$t_m$时刻以前的状态无关，即

$$P\{X_{m+k}=a_{i_{m+k}}|X_m=a_{i_m},\cdots,X_1=a_{i_1}\}$$
$$=P\{X_{m+k}=a_{i_{m+k}}|X_m=a_{i_m}\} \tag{7.8}$$

则称该过程为马尔可夫链，或简称为马氏链。

2．马氏链的转移概率及有限维分布　马氏链的转移概率定义为

$$p_{ij}(m,m+k)=P\{X_{m+k}=a_j|X_m=a_i\},$$
$$i,j=1,2,\cdots,N;\ m,k\text{皆为正整数} \tag{7.9}$$

如果$p_{ij}(m,m+k)$与m无关，则称该马氏链为齐次的。下面我们仅研讨齐次马氏链，并习惯上省去“齐次”二字。

马氏链的一步转移概率及其矩阵分别定义为

$$p_{ij}=p_{ij}(1)=p_{ij}(m,m+1)=P\{X_{m+1}=a_j|X_m=a_i\} \tag{7.10}$$

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(1)=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12}\cdots p_{1N} \\ p_{21} & p_{22}\cdots p_{2N} \\ \vdots & \\ p_{N1} & p_{N2}\cdots p_{NN} \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

一步转移概率矩阵$\boldsymbol{P}$有以下两个性质

$$0\leqslant p_{ij}\leqslant 1 \tag{7.12}$$

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}=1 \tag{7.13}$$

马氏链的高阶转移概率及其矩阵分别定义为

$$p_{ij}(n)=p_{ij}(m,m+n)=P\{X_{m+n}=a_j|X_m=a_i\} \tag{7.14}$$

$$\boldsymbol{P}(n)=\begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n)\cdots p_{1N}(n) \\ p_{21}(n) & p_{22}(n)\cdots p_{2N}(n) \\ \vdots & \\ p_{N1}(n) & p_{N2}(n)\cdots p_{NN}(n) \end{pmatrix} \tag{7.15}$$

n步转移概率矩阵$\boldsymbol{P}(n)$具有如下的性质：

$$0\leqslant p_{ij}(n)\leqslant 1 \tag{7.16}$$

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}(n)=1 \tag{7.17}$$

此外，还规定

$$p_{ij}(0)=p_{ij}(m,m)=\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

马氏链的n步转移概率及其矩阵具有如下的切普曼-柯尔莫哥洛夫方程的离散形式，即

$$p_{ij}(n)=p_{ij}(l+k)=\sum_{r=1}^{N} p_{ir}(l)p_{rj}(k) \tag{7.18}$$

$$\boldsymbol{P}(n)=\boldsymbol{P}(l+k)=\boldsymbol{P}(l)\boldsymbol{P}(k) \tag{7.19}$$

当n为任意正整数时，则有

$$\boldsymbol{P}(n)=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}(n-1)=\cdots=\boldsymbol{P}^n \tag{7.20}$$

式（7.18），若$n=k+1$，则有

$$p_{ij}(k+1)=\sum_r p_{ir}p_{rj}(k)=\sum_r p_{ir}(k)p_{rj} \tag{7.21}$$

由上可知，以一步转移概率p_{ij}为元素的一步转移概率矩阵$\boldsymbol{P}$决定了马氏链状态转移过程的概率法则。但是，$\boldsymbol{P}$决定不了初始概率分布，故必须引入初始概率

$$p_i=P\{X_0=a_i\},\quad i=0,1,2,\cdots \tag{7.22}$$

并称$\{p_i\}=(p_0,p_1,p_2,\cdots)$为初始分布。显然有

$$1\geqslant p_i\geqslant 0,\qquad \sum_i p_i=1 \tag{7.23}$$

若绝对概率$p_j(k)=P\{X_k=a_j\}$，则有

$$p_j(k+1)=\sum_i p_i p_{ij}(k+1)=\sum_i p_i(k)p_{ij} \tag{7.24}$$

马氏链的有限维分布可表示为

$$\begin{aligned}&P\{X_0=a_{i_0},X_1=a_{i_1},\cdots,X_n=a_{i_n}\}\\&=P\{X_0=a_{i_0}\}P\{X_1=a_{i_1}|X_0=a_{i_0}\}\\&\quad\cdots P\{X_n=a_{i_n}|X_{in-1}=a_{i_{n-1}}\}\\&=p_{i_0}p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{n-1}i_n}\end{aligned} \tag{7.25}$$

3．马氏链中状态的分类

（1）到达与相通　若对状态i和j，存在某个$n(\geqslant 1)$，使$p_{ij}(n)>0$，则称自状态i可到达状态j，并记为$i\to j$。反之，若自状态i不可到达状态j，记为$i\nrightarrow j$，此时，对一切$n(\geqslant 1)$，$p_{ij}(n)=0$。

若$i\to j$，$j\to i$，则称状态i与状态j相通，记为$i\leftrightarrow j$。

性质 1　到达具有传递性。即：若$i\to r$，$r\to j$，则$i\to j$。

性质 2　相通具有传递性。即：若$i\leftrightarrow r$，$r\leftrightarrow j$，则$i\leftrightarrow j$。

（2）状态空间的分解　可以根据相通的概念，把状态空间

I 分解为一些隔离的类。

设$C\subset I$，若从子集C内任一状态i不能到达C外的任一状态，则称C为闭集。

显然，对$n\geqslant 1$，$i\in C$，有

$$\sum_{j\in C} p_{ij}(n)=1 \tag{7.26}$$

除了整个状态空间（它构成一个闭集）外，没有别的闭集的马氏链称为不可约的。这时，所有状态都是相通的。

闭集的充要条件是：当i在C内、j在C外时，恒有$p_{ij}(n)=0(n\geqslant 1)$。

（3）常返态与非常返态（或滑过态） 对于任意两个状态i与j，在事件$\{X_0=i\}$上引入随机变量

$$T_{ij}=\min\{n:X_0=i,X_n=j;n\geqslant 1\} \tag{7.27}$$

即：T_{ij}是由状态i出发，首次进入状态j的时刻。对$\omega\in\{X_0\neq i\}$或$\omega\in\{X_0=i,X_n\neq j,n\geqslant 1\}$，可补充规定为

$$T_{ij}(\omega)=\infty \tag{7.28}$$

此外，定义

$$f_{ij}(n)=P\{T_{ij}=n\mid X_0=i\}\geqslant 0 \tag{7.29}$$

它为系统从状态i出发，经n步首次到达状态j的概率，显然有

$$\begin{aligned} f_{ij}(n)&=P\{X_n=j;X_m\neq j,m=1,2,\cdots n-1\mid X_0=i\}\\ &=\sum_{i_1\neq j}\cdots\sum_{i_{n-1}\neq j} p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}j},\quad n\geqslant 1 \end{aligned} \tag{7.30}$$

于是

$$f_{ij}(1)=p_{ij}=P\{X_1=j\mid X_0=i\}$$

$$f_{ij}(\infty)=P\{X_m\neq j,\ m\geqslant 1\mid X_0=i\}$$

再定义

$$\begin{aligned} f_{ij}&=\sum_{1\leqslant n<\infty} f_{ij}(n)\\ &=\sum_{1\leqslant n<\infty} P\{T_{ij}=n\mid X_0=i\}=P\{T_{ij}<\infty\} \end{aligned} \tag{7.31}$$

它是系统自状态 i 出发，迟早要到达状态 j 的概率。且有

$$f_{ij}(\infty)=P\{T_{ij}=\infty\}=1-P\{T_{ij}<\infty\}=1-f_{ij} \quad (7.32)$$

定理1 对任意的$i,j\in I$及$1\leqslant n<\infty$，有

$$p_{ij}(n)=\sum_{l=1}^{n} f_{ij}(l)p_{jj}(n-l) \quad (7.33)$$

定理2 $f_{ij}>0$的充要条件是$i\to j$。

推理 i、j相通的充要条件是$f_{ij}>0$及$f_{ji}>0$。

如果$j=i$，则T_{ii}表示由状态 i 出发，首次返回状态 i 所需的时间；f_{ii} 表示由状态 i 出发，经过有限步迟早要返回状态 i 的概率。因此，若$f_{ii}=1$，则称状态 i 为常返态；若 $f_{ii}<1$，则称状态 i 为非常返态（或滑过态）。

定理3 状态 i 是常返的充要条件为

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)=\infty \quad (7.34)$$

若状态 i 为非常返时，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)=\frac{1}{1-f_{ii}}<\infty \quad (7.35)$$

定理4 设状态 i、j 为马氏链的两个相通状态，则它们同为常返的，或同为非常返的。

定理5 若状态 j 是非常返的，则对每一个状态 i，有 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}(n)<\infty$，且 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)=0$。

（4）周期状态与非周期状态 如果有正整数$t(>1)$，只有在$n=t,2t,3t,\cdots$时，$p_{ii}(n)>0$；或者说，在 n 不能被 t 整除时，$p_{ii}(n)=0$，则称状态 i 是周期为 t 的。当不存在上述的 t 时，状态 i 为非周期的。

4．遍历性及平稳分布

（1）遍历性 设$X(n)$为齐次马氏链，若对于一切状态 i 与 j，存在不依赖于 i 的极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)=p_j \tag{7.36}$$

则称马氏链$X(n)$具有遍历性。

定理（有限马氏链具有遍历性的充分条件）对有限状态的齐次马氏链$X(n)$，若存在正整数m，使

$$p_{ij}(m)>0,\ i,j=1,2,\cdots,N \tag{7.37}$$

则此链是遍历的。而且，式（7.36）中的$\{p_j\}=\{p_1,p_2,\cdots,p_N\}$是方程组

$$p_j=\sum_{i=1}^{N} p_i p_{ij},\ j=1,2,\cdots,N \tag{7.38}$$

在满足条件

$$0<p_j<1,\quad \sum_{j=1}^{N} p_j=1 \tag{7.39}$$

下的唯一解。

（2）平稳分布　马氏链的一个概率分布$\{v_j\}$，即：$v_j\geqslant 0$和$\sum_{=0}^{\infty} v_j=1$，如有

$$v_j=\sum_{i=0}^{\infty} v_i p_{ij} \tag{7.40}$$

则称它为该链的平稳分布。并有

$$v_j=\sum_{i=0}^{\infty} v_i p_{ij}(n) \tag{7.41}$$

（三）马尔可夫过程

这里论及的马尔可夫过程是指时间、状态皆连续的马尔可夫过程。扩散过程就是这类马尔可夫过程的一个特例。

设有一随机过程$X(t)$，$t\in T$，$t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n\in T$，若在$t_1$、$t_2$、…、$t_{n-1}$、$t_n$对$X(t)$观测得到相应的观测值$x_1$、$x_2$、…、$x_{n-1}$、$x_n$满足

$$F_X(x_n,t_n|x_{n-1},x_{n-2},\cdots,x_2,x_1;t_{n-1},t_{n-2},\cdots,t_2,t_1)$$
$$=F_X(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1}),\ n\geqslant 3\text{的整数} \tag{7.42}$$

则称此类过程为马尔可夫过程，简称马氏过程。

马氏过程的转移概率分布定义为

$$F_X(x_n;t_n|x_{n-1};t_{n-1})=P\{X(t_n)\leqslant x_n|X(t_{n-1})=x_{n-1}\} \quad (7.43)$$

或
$$F_X(x;t|x_0;t_0)=P\{X(t)\leqslant x|X(t_0)=x_0\},\ t>t_0 \quad (7.44)$$

转移概率分布是关于 x 的分布函数，故有

（1）$F_X(x;t|x_0;t_0)\geqslant 0$ (7.45)

（2）$F_X(\infty;t|x_0;t_0)=1$ (7.46)

（3）$F_X(-\infty;t|x_0;t_0)=0$ (7.47)

（4）$F_X(x;t|x_0;t_0)$是关于 x 单调不减、右连续的函数。

（5）满足切普曼-柯尔莫哥洛夫方程

$$F_X(x;t|x_0;t_0)=\int_{-\infty}^{\infty} F_X(x;t|x_1;t_1)\mathrm{d}_{x_1}F_X(x_1;t_1|x_0;t_0) \quad (7.48)$$

马氏过程的转移概率密度定义为

$$f_X(x;t|x_0;t_0)=\frac{\partial}{\partial x}F_X(x;t|x_0;t_0) \quad (7.49)$$

故有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x;t|x_0;t_0)\mathrm{d}x=1 \quad (7.50)$$

$$f_X(x;t|x_0;t_0)\to\delta(x-x_0),\ \text{当}t\to t_0\text{时} \quad (7.51)$$

$$f_X(x_n;t_n|x_{n-1},x_{n-2},\cdots,x_2,x_1;t_{n-1},t_{n-2},\cdots,t_2,t_1)$$
$$=f_X(x_n;t_n|x_{n-1};t_{n-1}),\ n\geqslant 3\text{的整数} \quad (7.52)$$

它也满足切普曼-柯尔莫哥洛夫方程

$$f_X(x_n;t_n|x_k;t_k)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_n;t_n|x_r;t_r)f_X(x_r;t_r|x_k;t_k)\mathrm{d}x_r,$$
$$t_k<t_r<t_n \quad (7.53)$$

如果马氏过程$X(t)$有

$$F_X(x;t|x_0;t_0)=F_X(x|x_0;\tau),\ \tau=t-t_0 \quad (7.54)$$

或
$$f_X(x;t|x_0;t_0)=f_X(x|x_0;\tau),\ \tau=t-t_0 \quad (7.55)$$

则称它为齐次马尔可夫过程。

马氏过程$X(t)$的n维概率密度可写成

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=f_X(x_1;t_1)\prod_{i=1}^{n-1}f_X(x_{i+1};t_{i+1}|x_i;t_i),\quad t_1<t_2<\cdots<t_n \tag{7.56}$$

（四）例解

〔例7.1〕 已知独立随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，序列中的各个随机变量分别具有概率密度$f_{X_1}(x_1),f_{X_2}(x_2),\cdots,f_{X_n}(x_n)$。现设：$Y_1=X_1$，$Y_2=X_1+X_2,\cdots,Y_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$。于是，构成了一个新的随机变量序列 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$。试证序列 Y_n 是一个马尔可夫序列。

证：根据题意，不难得到随机变量$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$的联合概率密度为

$$f_{Y_1\sim Y_n}(y_1,\cdots,y_n)=f_{X_1}(y_1)f_{X_2}(y_2-y_1)\cdots f_{X_n}(y_n-y_{n-1}) \quad (1)$$

由（1）式及全概率公式，可以推导出条件概率密度为

$$f_Y(y_n|y_{n-1},\cdots,y_1)=\frac{f_{Y_1\sim Y_n}(y_1,\cdots,y_n)}{f_{Y_1\sim Y_{n-1}}(y_1,\cdots,y_{n-1})}$$

$$=\frac{f_{X_1}(y_1)f_{X_2}(y_2-y_1)\cdots f_{X_{n-1}}(y_{n-1}-y_{n-2})f_{X_n}(y_n-y_{n-1})}{f_{X_1}(y_1)f_{X_2}(y_2-y_1)\cdots f_{X_{n-1}}(y_{n-1}-y_{n-2})}$$

$$=f_{X_n}(y_n-y_{n-1}) \quad (2)$$

（2）式的最后结果表明：$f_Y(y_n|y_{n-1},\cdots,y_1)$与$y_{n-2}$、$\cdots$、$y_1$是无关的，即序列$Y_n$具有无后效性，故序列$Y_n$确实是马尔可夫序列。

〔例7.2〕 在玻尔(Bohr)氢原子模型中，电子可以在允许的轨道之一上运动；我们假设以$X_{n-1}=a_i$表示电子在第i条轨道上运动，并且电子轨道的跃迁仅在t_1、t_2、$\cdots$、t_n、$\cdots$可列个时刻发生，在时刻t_n电子由第i条轨道转移到第j条轨道的概率只与i、j有关，而与电子过去在哪条轨道上无关。显然，电子轨道的跃迁过程$X(t)$是一个马氏链。

〔例7.3〕 无限制的随机游动。设质点 M 在直线上作随机游动，假定 M 在某个时刻位于 i，则在下一步 M 以概率 p 向右移动一格到达 $i+1$，或以概率 $q=1-p$ 向左移动一格到达 $i-1$。

现若以 $X_n=X(n)$ 表示时刻 n 质点的位置，则 $X(n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 是一个随机过程。而且，当 $X_n=i$ 时，$X_{n+1},X_{n+2},\cdots,X_{n+k},\cdots$ 等 n 时刻以后 M 所处的状态只与 $X_n=i$ 有关，而与 M 在 n 时刻以前是如何到达 i 是完全无关的。故它是一个齐次马氏链，其状态空间 $I=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，它的一步转移概率为

$$p_{i,i+1}=p \qquad i\in I,\ 0\leqslant p\leqslant 1$$

$$p_{i,i-1}=q=1-p$$

$$p_{ij}=0 \qquad j\neq i+1,i-1,j\in I$$

下面我们求此马氏链的 n 步转移概率 $p_{ij}(n)$。已知每次转移只有两种可供的选择：向右的概率为 p；向左的概率为 q。而 n 次转移的结果是从 i 到达 j。若 n 次转移中，m 次向右，k 次向左，则

$$m+k=n$$

$$m\cdot 1+k\cdot(-1)=j-i$$

因此

$$m=\frac{n+j-i}{2},\qquad k=\frac{n-j+i}{2}$$

$$p_{ij}(n)=\begin{cases}\dbinom{n}{\frac{n+j-i}{2}}p^{\frac{n+j-i}{2}}q^{\frac{n-j+i}{2}}, & n+j-i\text{为偶数}\\ 0, & n+j-i\text{为奇数}\end{cases}$$

特别有

$$p_{ii}(n)=\begin{cases}\dbinom{n}{\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}}q^{\frac{n}{2}}, & n\text{为偶数}\\ 0, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

利用斯特灵(Stirling)公式 $n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi n}$，可得

$$p_{ii}(2n)=\binom{2n}{n}(pq)^n=\frac{(2n)!}{(n!)(n!)}(pq)^n$$

$$\approx\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\cdot\sqrt{2\pi\cdot 2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}(pq)^n$$

$$=\frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

〔例7.4〕 设有九个状态{0，1，2，3，4，5，6，7，8}的马氏链，它的一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}
* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
* & * & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & *\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

矩阵中*为具有正概率的元素。试对此链状态进行分类。

解：在此$\boldsymbol{P}$中，因$p_{00}=1$，故状态0为吸收态，它本身构成一个闭集。因$p_{12}=p_{21}=1$，即1、2两状态是相通的，它们处于同一类中，故{1，2}构成了另一个闭集。

又因转移概率p_{34}、p_{35}、p_{45}皆为正，而$p_{53}=1$，现画出三个状态{3，4，5}部分传递图，如图7.1所示。经分析，3、4、5三个状态是相通的，处于同一类中，故{3，4，5}也构成一个较大的闭集。

〔例7.5〕 设有三个状态{0，1，2}的马氏链，其一步转移概

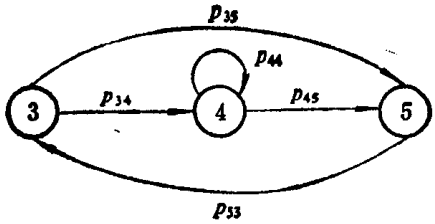


图 7.1 例7.4部分状态传递图

率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

试求$f_{00}(1)$，$f_{00}(2)$，$f_{00}(3)$，$f_{01}(1)$，$f_{01}(2)$，$f_{01}(3)$。

解：由式（7.30）可知

$$f_{ij}(n)=\sum_{i_1\neq j}\cdots\sum_{i_{n-1}\neq j}p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}j},\quad n\geqslant 1$$

且因$f_{ij}(1)=p_{ij}$；另外，从所给矩阵$\boldsymbol{P}$，得到一步转移概率为

$$p_{00}=\frac{1}{3},\quad p_{01}=\frac{2}{3},\quad p_{02}=0,$$

$$p_{10}=0,\quad p_{11}=\frac{2}{3},\quad p_{12}=\frac{1}{3},$$

$$p_{20}=\frac{1}{2},\quad p_{21}=0,\quad p_{22}=\frac{1}{2}$$

故我们不难求得

$$f_{00}(1)=p_{00}=\frac{1}{3}$$

$$f_{00}(2)=\sum_{i_1\neq j}p_{ii_1}p_{i_1j}=\sum_{i_1\neq 0}p_{0i_1}p_{i_10}$$

$$= p_{01}p_{10} + p_{02}p_{20} = \frac{2}{3} \times 0 + 0 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$f_{00}(3) = \sum_{i_1 \neq j} \sum_{i_2 \neq j} p_{ii_1}p_{i_1i_2}p_{i_2j}$$

$$= \sum_{i_1 \neq 0} \sum_{i_2 \neq 0} p_{0i_1}p_{i_1i_2}p_{i_20}$$

$$= \sum_{i_1 \neq 0} [p_{0i_1}(p_{i_11}p_{10} + p_{i_12}p_{20})]$$

$$= p_{01}(p_{11}p_{10} + p_{12}p_{20}) + p_{02}(p_{21}p_{10} + p_{22}p_{20})$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) + 0 = \frac{1}{9}$$

$$f_{01}(1) = p_{01} = \frac{2}{3}$$

$$f_{01}(2) = \sum_{i_1 \neq 1} p_{0i_1}p_{i_11} = p_{00}p_{01} + p_{02}p_{21}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{9}$$

$$f_{01}(3) = \sum_{i_1 \neq 1} \sum_{i_2 \neq 1} p_{0i_1}p_{i_1i_2}p_{i_21}$$

$$= \sum_{i_1 \neq 1} [p_{0i_1}(p_{i_10}p_{01} + p_{i_12}p_{21})]$$

$$= p_{00}(p_{00}p_{01} + p_{02}p_{21}) + p_{02}(p_{20}p_{01} + p_{22}p_{21})$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + 0 \times 0\right) + 0 = \frac{2}{27}$$

〔例7.6〕 现在，我们进一步研究无限制随机游动各状态{0，±1，±2，…}的性质。

解：它的一步转移概率为

$$p_{i,i+1} = p$$

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$p_{i,i-1} = q = 1 - p$$

因为无限制随机游动中的各状态均相通，故所有状态或全部是常返的或全为非常返的。现在研究状态 0 的性质，研究的方法是计算$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n)$。若$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n)$为有限值，则状态 0为非常返的；若$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n)$为无限大值，则状态0为常返的。

从状态0出发，经过奇数次的转移，它所取的状态不可能为偶数状态，故

$$p_{00}(2n+1)=0,\quad n=0,1,2,\cdots$$

从状态 0 出发，经过偶数次的转移，它所取的状态只能为偶数状态，故经过偶数次的转移可到达状态 0 。由〔例7.3〕可知

$$p_{00}(2n)=\binom{2n}{n}(pq)^n\approx\frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}=\frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n)=\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(2n)\approx\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}}$$

式中，$4p(1-p)\leqslant 1$；只有当$p=\frac{1}{2}$时，$4p(1-p)=1$。

（1）当$p=\frac{1}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\right)=\infty$，即$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n)$为发散级数。可见，在$p=\frac{1}{2}$时，状态 0 为常返态，因而无限制随机游动的所有状态全为常返的。

（2）当$p\neq\frac{1}{2}$时，$4p(1-p)<1$，$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n)<\infty$，即：$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n)$为收敛级数，状态0为滑过态，则无限制随机游动的所有状态全为非常返的。

〔例7.7〕 设有八个状态 {0，1，2，3，4，5，6，7} 的马氏链，它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

试画出其状态传递图，并问此过程是否具有周期性。

解：图7.2为马氏链的状态传递图。

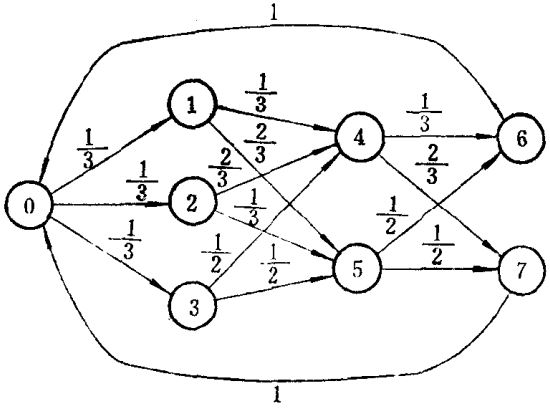


图 7.2 例7.7的状态传递图

八个状态可分成四个子集，C_1:{0}，C_2:{1,2,3},C_3:{4,5},

C_4:{6,7}。此过程有确定性的周期转移

$$C_1\to C_2\to C_3\to C_4\to C_1$$

故该马氏链具有周期性，其周期 $t=4$。

〔例7.8〕 设有三个状态{1，2，3}的马氏链，它的一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

试问何时此链具有遍历性？并求出极限分布的各个概率。

解：(1)求何时该马氏链具有遍历性 显然，在m=1时，有 $\boldsymbol{P}(1)=\boldsymbol{P}$，因$\boldsymbol{P}$中所有元素皆大于零，故式（7.37）即可满足。所以，$m=1$时，该链具有遍历性，即

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}(n)=p_j,\quad i,j=1,2,3$$

（2）求p_j 在$j=1,2,3$时，由式（7.38)、(7.39)，可列出方程组

$$p_1=p_1p_{11}+p_2p_{21}+p_3p_{31} \qquad (1)$$

$$p_2=p_1p_{12}+p_2p_{22}+p_3p_{32} \qquad (2)$$

$$p_3=p_1p_{13}+p_2p_{23}+p_3p_{33} \qquad (3)$$

$$p_1+p_2+p_3=1 \qquad (4)$$

将题设条件代入式（1)、(2)、(3)，我们得到

$$p_1=\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{3}p_2+\frac{1}{4}p_3 \qquad (1')$$

$$p_2=\frac{1}{4}p_1+\frac{1}{3}p_2+\frac{1}{2}p_3 \qquad (2')$$

$$p_3=\frac{1}{4}p_1+\frac{1}{3}p_2+\frac{1}{4}p_3 \qquad (3')$$

式（1′)－(3′）可得

$$p_1-p_3=\frac{1}{4}p_1,\quad p_1=\frac{4}{3}p_3$$

式（2′）－（3′）可得

$$p_2-p_3=\frac{1}{4}p_3,\quad p_2=\frac{5}{4}p_3$$

从而式（4）可写成

$$\frac{4}{3}p_3+\frac{5}{4}p_3+p_3=1 \qquad (4')$$

由式（4′）容易求得

$$p_3=\frac{12}{43}$$

于是，可得

$$p_1=\frac{16}{43},\quad p_2=\frac{15}{43}$$

二、独立增量过程

（一）独立增量过程

设有一个随机过程$X(t)(t\in T)$，若对任意的时刻$0\leqslant t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n<b$，过程的增量$X(t_1)-X(t_0)$、$X(t_2)-X(t_1)$、…、$X(t_n)-X(t_{n-1})$是相互独立的随机变量，则称$X(t)$为独立增量过程或可加过程。

若参数集$T=[t_0,b)$，则象马尔可夫过程一样，独立增量过程的有限维分布可由它的初始概率分布$P\{X(t_0)<x\}$及一切增量的概率分布唯一地确定。

如果独立增量过程$X(t)$的增量$X(t_i)-X(t_{i-1})$的分布仅与(t_i-t_{i-1})有关，而与t_i、t_{i-1}本身无关，则称$X(t)$为齐次的。

（二）泊松过程

实际上，泊机过程就是一个纯不连续的马尔可夫过程，而且也是一个独立增量过程。

1．泊松过程

（1）定义　设随机过程$X(t)(t\in[t_0\geqslant 0,\ \infty))$的状态只取非负整数值，若满足下列三个条件：

① $P\{X(t_0)=0\}=1$；

② $X(t)$为均匀独立增量过程；

③ 对任意时刻t_1、$t_2\in[t_0,\infty)$，$t_1<t_2$，对应的随机变量的增量$X(t_1,t_2)=X(t_2)-X(t_1)$服从数学期望为$\lambda(t_2-t_1)$的泊松分布，即对于$k=0,1,2,\cdots$有

$$P_k(t_1,t_2)=P\{X(t_1,t_2)=X(t_2)-X(t_1)=k\}$$

$$=\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)} \tag{7.57}$$

则称$X(t)$为泊松过程。

对于式（7.57），若$t_1=0$，$t_2=t$时，则有

$$P_k(0,t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\quad t>0,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{7.58}$$

（2）数字特征　泊松过程$X(t)$的均值、均方值、方差、自相关函数分别为

$$E[X(t)]=\lambda t \tag{7.59}$$

$$E[X^2(t)]=\lambda^2t^2+\lambda t \tag{7.60}$$

$$D[X(t)]=\lambda t \tag{7.61}$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=\begin{cases}\lambda t_2+\lambda^2t_1t_2, & t_1\geqslant t_2\\ \lambda t_1+\lambda^2t_1t_2, & t_1\leqslant t_2\end{cases} \tag{7.62}$$

2．泊松增量

（1）定义　由泊松过程$X(t)$在给定的时间间隔$\Delta t>0$内的增量与Δt之比，我们构成一新过程

$$Y(t)=\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t} \tag{7.63}$$

称它为泊松增量。显然，若k是间隔$(t,t+\Delta t)$内的随机点数，则$Y(t)=k/\Delta t$。故

$$P\left\{Y(t)=\frac{k}{\Delta t}\right\}=\frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!}e^{-\lambda\Delta t} \tag{7.64}$$

（2）$Y(t)$的均值、自相关函数分别为

$$E[Y(t)]=\frac{1}{\Delta t}E[X(t+\Delta t)]-\frac{1}{\Delta t}E[X(t)]=\lambda \tag{7.65}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=\begin{cases}\lambda^2, & |t_1-t_2|>\Delta t\text{(无交叠时)}\\ \lambda^2+\dfrac{\lambda}{\Delta t}-\dfrac{\lambda|t_1-t_2|}{\Delta t^2}, & |t_1-t_2|<\Delta t\text{(有交叠时)}\end{cases}$$

(7.66)

3．泊松冲激序列

（1）定义　泊松过程$X(t)$对t求导，就能得到与时间轴上的随机点t_i相对应的冲激序列$Z(t)$，我们称此离散随机过程为泊松冲激序列。即

$$Z(t)=\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_i \delta(t-t_i) \tag{7.67}$$

或

$$Z(t)=\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0} Y(t) \tag{7.68}$$

（2）$Z(t)$的均值、相关函数分别为

$$E[Z(t)]=\lambda \tag{7.69}$$

$$R_Z(t_1,t_2)=\begin{cases}\lambda^2, & |t_1-t_2|>\Delta t\\ \lambda^2+\lambda\delta(t_1-t_2), & |t_1-t_2|<\Delta t\end{cases} \tag{7.70}$$

由于

$$\begin{cases}E[Z(t)]=\lambda\\ R_Z(\tau)=\lambda^2+\lambda\delta(t_1-t_2),\ \tau=|t_1-t_2|\end{cases}$$

故泊松冲激序列是平稳的。从而，$Z(t)$的功率谱密度为

$$S_Z(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_Z(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=2\pi\lambda^2\delta(\omega)+\lambda \tag{7.71}$$

4．过滤的泊松过程与散粒噪声

（1）过滤的泊松过程　设有一泊松冲激脉冲序列$Z(t)=\sum_i \delta(t-t_i)$经过一线性时不变滤波器，则此滤波器输出是一随机过程$X(t)$（见图7.3）。

$$X(t)=Z(t)*h(t)=\sum_{i=1}^{N(T)} h(t-t_i),\ 0\leqslant t<\infty \tag{7.72}$$

式中，$h(t)$为滤波器的冲激响应；t_i为第i个冲激脉冲出现的时

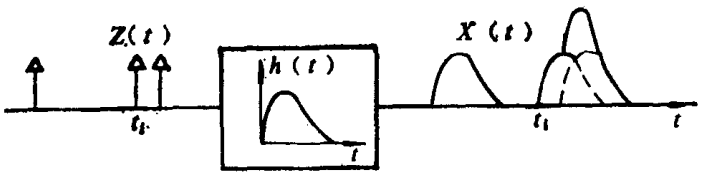


图 7.3 过滤的泊松过程示意图

间；$N(T)$为在$[0,T)$内输入到滤波器的冲激脉冲的个数，它服从泊松分布。我们称此$X(t)$为过滤的泊松过程。

（2）散粒噪声 在电子管、晶体管中，由散粒效应引起的散粒噪声电流皆为过滤的泊松过程。因此，散粒噪声$X(t)$可表示成类似式（7.72）的形式

$$X(t)=Z(t)*h(t)=\sum_i h(t-t_i),\quad -\infty<t<\infty \tag{7.73}$$

而且，不难证明此$X(t)$也是平稳的。故散粒噪声$X(t)$的均值、功率谱密度、自相关函数、自协方差函数和方差分别为

$$E[X(t)]=E[Z(t)*h(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}E[Z(t-\eta)]h(\eta)\mathrm{d}\eta$$

$$=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}h(\eta)\mathrm{d}\eta \tag{7.74a}$$

$$=\lambda H(0) \tag{7.74b}$$

$$S_X(\omega)=|H(\omega)|^2S_Z(\omega)=2\pi\lambda^2H^2(0)\delta(\omega)+\lambda|H(\omega)|^2 \tag{7.75}$$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\lambda^2H^2(0)+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau+\beta)h(\beta)\mathrm{d}\beta \tag{7.76}$$

$$K_X(\tau)=R_X(\tau)-E^2[X(t)]=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau+\beta)h(\beta)\mathrm{d}\beta \tag{7.77}$$

$$\sigma_X^2=K_X(0)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}h^2(\beta)\mathrm{d}\beta=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}h^2(t)\mathrm{d}t \tag{7.78}$$

（三）维纳过程

维纳过程$W(t)$是另一个最重要的独立增量过程，有时也称它为布朗运动过程，还可将它看成是随机游动$X(t)$的极限形式。

1．定义　设随机过程$W(t)$($t\in[0,\infty)$)满足下列条件：

（1）$P\{W(0)=0\}=1$；

（2）$W(t)$为均匀独立增量过程，且对任意时刻t_1、$t_2\in[0,\infty)$，$t_1<t_2$，及$\varepsilon>0$，$[W(t_2+\varepsilon)-W(t_1+\varepsilon)]$具有与$[W(t_2)-W(t_1)]$相同的正态分布函数，其概率密度为

$$f_W(w_2-w_1;t_2,t_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(t_2-t_1)}}\exp\left[-\frac{(w_2-w_1)^2}{2\alpha(t_2-t_1)}\right] \tag{7.79}$$

式中，α为正实常数。

（3）对任意时刻$t\in[0,\infty)$，$W(t)$具有均值$E[W(t)]=0$的正态分布函数，其概率密度为

$$f_W(w;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}}e^{-w^2/2\alpha t} \tag{7.80}$$

则称$W(t)$为维纳过程。

2．$W(t)$的均值和自相关函数分别为

$$E[W(t)]=E[\lim_{\substack{T\to 0\\ n\to\infty}} X(t=nT)]=0 \tag{7.81}$$

$$R_W(t_1,t_2,)=E[W(t_1)W(t_2)]=\alpha\min(t_1,t_2)$$
$$=\begin{cases}\alpha t_1, & t_1\leqslant t_2\\ \alpha t_2, & t_1\geqslant t_2\end{cases} \tag{7.82}$$

3．$W(t)$与正态白噪声$N(t)$　维纳过程$W(t)$的形式导数$\dot{W}(t)$就是正态白噪声$N(t)$，$N(t)$的自相关函数为

$$R_N(t_1,t_2)=E[N(t_1)N(t_2)]=E[\dot{W}(t_1)\dot{W}(t_2)]$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}R_W(t_1,t_2)=\alpha\delta(t_2-t_1) \tag{7.83}$$

令　$t_2-t_1=\tau$，则有

$$R_N(\tau)=\alpha\delta(\tau) \tag{7.84}$$

换言之，$W(t)$可表示为$N(t)$的积分，即

$$W(t)=\int_0^t N(u)\mathrm{d}u \tag{7.85}$$

4．扩散方程

维纳过程$W(t)$满足下列扩散方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial t_1}=\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial w_1^2}\\&\frac{\partial p}{\partial t_2}+\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial w_2^2}=0\end{aligned}\tag{7.86}$$

式中，$p=p(w_2,t_2;w_1,t_1)=f_W(w_1;t_1|W(t_2)=w_2)\ (t_1>t_2)$为在$W(t_2)=w_2$之下随机变量$W(t_1)$的条件概率密度。实际上，此式是柯尔莫哥洛夫方程（向前和向后方程）的特例。

可以证明（见习题7-25），下列条件概率密度式

$$\begin{aligned}&p(w_2,t_2;w_1,t_1)=f_W(w_1;t_1|w_2;t_2)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha(t_1-t_2)}}\exp\left[-\frac{(w_1-w_2)^2}{2\alpha(t_1-t_2)}\right],\quad t_1>t_2\end{aligned}\tag{7.87}$$

是式（7.86）具有初始条件为

$$f_W(w_1;t_1|w_2;t_2)\to\delta(w_1-w_2),\quad t_1\to t_2\tag{7.88}$$

的唯一解。

（四）例解

〔**例7.9**〕（电子渡越） 现在假设冲激响应$h(t)$为三角形函数

$$h(t)=\begin{cases}kt, & 0\leqslant t\leqslant T\\0, & \text{其它}\end{cases}$$

如图7.4(a)所示。这时，得到的散粒噪声$X(t)$，可以看成是二极管内电子由阴极飞越到阳极过程中，阳极电路上所感应的电流。试求此散粒噪声的均值、方差、功率谱密度。

解：因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\mathrm{d}t=\int_0^T kt\mathrm{d}t=\frac{kT^2}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}h^2(t)\mathrm{d}t=\int_0^T k^2t^2\mathrm{d}t=\frac{k^2T^3}{3}$$

由式 (7.74a)和式 (7.78)，我们得到散粒噪声 $X(t)$ 的均值、方差为

$$E[X(t)]=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\lambda kT^2}{2}$$

$$\sigma_X^2=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}h^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\lambda k^2T^3}{3}$$

不难求得 $h(t)$的傅里叶变换为

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_0^T kt\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}\frac{2k\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\mathrm{j}\omega^2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}\frac{kT}{\mathrm{j}\omega}$$

因而

$$|H(\omega)|^2=H(\omega)\cdot H(-\omega)$$

$$=\frac{k^2}{\omega^4}[2-2\cos\omega T+\omega^2T^2-2\omega T\sin\omega T]$$

及

$$H(0)=\int_0^T kt\,\mathrm{d}t=\frac{kT^2}{2}$$

由上面二式和式 (7.75)，可得 $X(t)$的功率谱密度为

$$S_X(\omega)=2\pi\lambda^2H^2(0)\delta(\omega)+\lambda|H(\omega)|^2$$

$$=\frac{1}{2}\pi\lambda^2k^2T^4\delta(\omega)+\frac{\lambda k^2}{\omega^4}[2-2\cos\omega T+\omega^2T^2-2\omega T\sin\omega T]$$

如图7.4(b)所示。

〔**例7.10**〕(散粒噪声的过渡现象) 已知微分方程

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}+\alpha X(t)=Z(t),\quad X(0)=0$$

这里，$Z(t)$为平稳随机过程，它具有

$$E[Z(t)]=\lambda\quad 及\quad R_Z(\tau)=\lambda^2+\lambda\delta(\tau)$$

过程 $Z(t)$可看成是泊松冲激序列。于是，产生的 $X(t)$ 为一阶散粒噪声。现在，欲求过程 $X(t)$ 的数学期望、自相关函数及 自协方差函数。

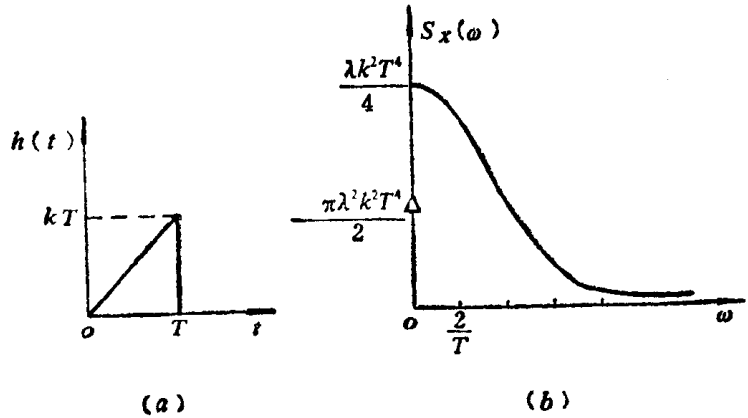


图 7.4 例7.9的$h(t)$和$S_X(\omega)$之图形

解：因为

$$\frac{dX(t)}{dt}+\alpha X(t)=Z(t),\quad X(0)=0$$

对上面二式两边求数学期望，得到

$$\frac{dm_X(t)}{dt}+\alpha m_X(t)=\lambda,\quad m_X(0)=0$$

故可解得$X(t)$的数学期望为

$$m_X(t)=\frac{\lambda}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

如图7.5所示。

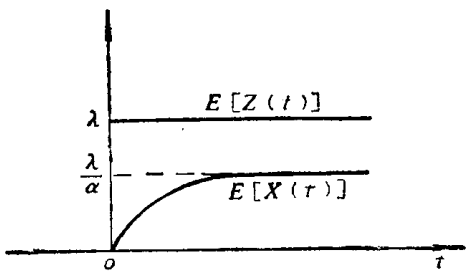


图 7.5

$X(t)$的自相关函数$R_X(t_1,t_2)$，可以通过确定激励$Z(t)$及其响应$X(t)$的互相关函数$R_{ZX}(t_1,t_2)$，而容易地求得。我们知道，

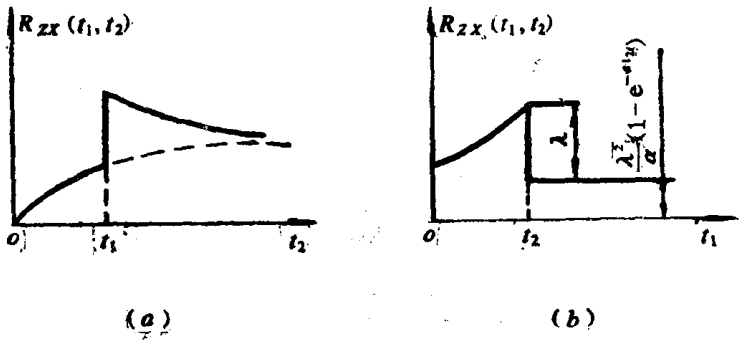
$Z(t)$ 和 $X(t)$ 的互相关函数 $R_{ZX}(t_1,t_2)$ 应满足（自变量为 t_2 的）微分方程

$$\frac{\partial R_{ZX}(t_1,t_2)}{\partial t_2}+\alpha R_{ZX}(t_1,t_2)=\lambda^2+\lambda\delta(t_2-t_1),\ R_{ZX}(t_1,0)=0$$

用初等方法，可解得

$$R_{ZX}(t_1,t_2)=\frac{\lambda^2}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t_2})+\lambda\mathrm{e}^{-\alpha(t_2-t_1)}U(t_2-t_1)$$

图 7.6(*a*) 是上式作为 t_2 的函数（此时，t_1 固定）之图形，(*b*) 是把 $R_{ZX}(t_1,t_2)$ 当作 t_1 的函数（t_2 固定）之图形。



(*a*)　　(*b*)

图 7.6

而 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(t_1,t_2)$ 应满足（自变量为 $t_1(<t_2)$ 的）微分方程

$$\frac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1}+\alpha R_X(t_1,t_2)=\frac{\lambda^2}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t_2})+\lambda\mathrm{e}^{-\alpha(t_2-t_1)}$$

和初始条件

$$R_X(0,t_2)=0$$

因为其中的 t_2 是常数，故此微分方程的激励可看成是某个常数加上形如 $\mathrm{e}^{\alpha t_1}$ 的指数式，它的解为

$$R_X(t_1,t_2)=\frac{\lambda^2}{\alpha^2}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t_2})(1-\mathrm{e}^{-\alpha t_1})$$

$$+\frac{\lambda}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha(t_2-t_1)}(1-\mathrm{e}^{-2\alpha t_1})$$

由于 $R_X(t_1,t_2)=R_X(t_2,t_1)$，因此，在 $t_1>t_2$ 时，可在上式中交换

t_1 与 t_2 的位置便可得到，即

$$R_X(t_2,t_1)=\frac{\lambda^2}{\alpha^2}(1-e^{-\alpha t_1})(1-e^{-\alpha t_2})$$

$$+\frac{\lambda}{2\alpha}e^{-\alpha(t_1-t_2)}(1-e^{-2\alpha t_2})$$

$X(t)$ 的自协方差函数 $K_X(t_1,t_2)$、$K_X(t_2,t_1)$ 可方便地求得

$$K_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)$$

$$=\frac{\lambda}{2\alpha}e^{-\alpha(t_2-t_1)}(1-e^{-2\alpha t_1}),\quad t_1<t_2$$

$$K_X(t_2,t_1)=R_X(t_2,t_1)-m_X(t_2)m_X(t_1)$$

$$=\frac{\lambda}{2\alpha}e^{-\alpha(t_1-t_2)}(1-e^{-2\alpha t_2}),\quad t_1>t_2$$

〔例7.11〕 维纳过程 $W(t)$ 的增量 $[W(t_2)-W(t_1)]$，在 $t_2>t_1$ 时，证明此增量的方差为 $\alpha(t_2-t_1)$。

证：因为该增量的均值为

$$E[W(t_2)-W(t_1)]=E[W(t_2)]-E[W(t_1)]=0$$

所以，我们容易求出此增量的方差为

$$D[W(t_2)-W(t_1)]=E[(W(t_2)-W(t_1))^2]$$

$$=E[W^2(t_2)]+E[W^2(t_1)]-2E[W(t_1)W(t_2)]$$

$$=\alpha t_2+\alpha t_1-2\alpha t_1=\alpha(t_2-t_1)$$

从而得证。

三、独立随机过程

如果随机过程 $X(t)$ $(t\in T)$ 的任意 n 维分布函数为

$$F_X(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\prod_{i=1}^{n}F_X(x_i;t_i),\quad n=2,3,\cdots \tag{7.89}$$

则称 $X(t)$ 为独立随机过程。

按照时间参数 t 是连续还是离散，独立随机过程可分成独立连续时间随机过程和独立离散时间随机过程——独立随机(变量)序列。

Ⅲ.习　　题

7—1　已知一独立随机变量序列 X_n，其中各个随机变量分别具有概率密度 $f_{X_1}(x_1)$，…，$f_{X_n}(x_n)$，…。我们由定义

$$Y_1 = X_1,\ \cdots,\ Y_n + CY_{n-1} = X_n,\ \cdots\ (n \geqslant 2,\ C \text{为常数})$$

构成一个新序列 Y_n。试证序列 Y_n 为马尔可夫序列。

7—2　写出下列集合的马尔可夫链的转移概率矩阵：

（1）$I_1 = \{0,1,2,\cdots,n\}\ (n \geqslant 2)$ 是有限个正整数集合；若 $p_{00} = 1$，$p_{nn} = 1$，且

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \text{当} j = i+1 \text{时} \\ q, & \text{当} j = i-1 \text{时} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

这里，$q = 1 - p$。

（2）$I_2 = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ 是全体整数的集合；若

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \text{当} j = i+1 \text{时} \\ q, & \text{当} j = i-1 \text{时} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

式中，$q = 1 - p$。

7—3　带有一个吸收壁的随机游动。仍考虑质点 M 的随机游动，其规律基本上同例7.3所述。但其状态空间 $I = \{0,1,2,\cdots\}$，而且当 M 一旦到达 $X_n = 0$ 以后，X_{n+1} 也就停留在零这个状态上，这样的状态称为吸收态。又因“0”为状态空间的一个端点（壁），故称此过程为带有一个吸收壁的随机游动。试问此过程是齐次马尔可夫链吗？并写出它的一步转移概率。

7—4　带有一个反射壁的随机游动。对随机游动取状态空间 $I = \{0,1,2,\cdots\}$，这里和上题有所不同，0这个状态不再是吸收态了，一旦质点 M 进入0状态后，下一步它以概率 p 向右移一格，以概率 q 停在0状态。这后一种情况可作如下解释：设想在“$-1/2$”处有一反射壁，每次质点自0向左移动时，即被反射壁反射回0状态。正是基于上述解释，我们把这类过程称为带有一个反射壁的随机游动。试问此过程是否是齐次马尔可夫链？并写出它的一步转移概率。

7—5　设有三个状态 $\{0,1,2\}$ 的马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ q & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

（1）试求$P(2)$，并证明$P(2)=P(4)$；（2）求$P(n)$，$n\geqslant 1$。

7—6 天气预报问题.如果明日是否有雨仅与今日的天气（是否有雨）有关，而与过去的天气无关。并设今日有雨而明日有雨的概率为0.7，今日无雨而明日有雨的概率为0.4。另外，假定把“有雨”称作“1”状态天气，而把“无雨”称为“2”状态天气。则本题属一个两状态的马尔可夫链。试求：它的一步至四步转移概率矩阵；并问：今日有雨而后日（第二日）无雨、今日有雨而第三日也有雨、今日无雨而第四日也无雨的概率各为多少？

7—7 设有三个状态{0,1,2}的马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\\ 0 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

研究此链各状态之间的关系，并画出状态传递图。

7—8 设有两个状态{0,1}的马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/3 & 2/3\end{pmatrix}$$

试求：$f_{00}(1)$，$f_{00}(2)$，$f_{00}(3)$，$f_{01}(1)$，$f_{01}(2)$，$f_{01}(3)$。

7—9 设有三个状态{0,1,2}的马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}p_1 & q_1 & 0\\ 0 & p_2 & q_2\\ q_3 & 0 & p_3\end{pmatrix}$$

试求：$f_{00}(1)$，$f_{00}(2)$，$f_{00}(3)$，$f_{01}(1)$，$f_{01}(2)$，$f_{01}(3)$。

7—10 设有六个状态{0,1,2,3,4,5}的马尔可夫链，其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

试画出该链的状态传递图，并问此过程是否具有周期性。

7—11 某（齐次）马尔可夫链的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}2/3 & 1/3\\ 1/3 & 2/3\end{bmatrix}$$

试证：$n\to\infty$时，则有

$$P(n)=P^n\longrightarrow\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

7—12 设（齐次）马尔可夫链的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1/2 & 1/3 & 1/6\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 1/2 & 1/6\end{bmatrix}$$

试问此链共有几个状态？是否遍历？求它的二步转移概率矩阵。

$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}(n)=p_j$是否存在？并求之。

7—13 设马尔可夫链的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 1/3 & 0 & 2/3\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{bmatrix}$$

试问此链共有几个状态？何时具有遍历性？并求出极限分布$\{p_j\}$的各个概率。

7—14 设有三个状态$\{1,2,3\}$的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4 & 0.1\\ 0.3 & 0.4 & 0.3\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix}$$

试问何时此链具有遍历性？并求出极限分布$\{p_j\}$的各个概率。

7—15 设有五个状态$\{1,2,3,4,5\}$的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

试问何时此链具有遍历性？并求出极限分布$\{p_j\}$的各个概率。

7—16 对于随机过程$X(t)$，若有$t_1<t_2$，对每个$t\leqslant t_1$，$X(t_2)-X(t_1)$与$X(t)$都是统计独立的，试证$X(t)$为马尔可夫过程。

7—17　对于马尔可夫过程$X(t)$，证明

$$E[X(t_n)\,|\,X(t_{n-1}),X(t_{n-2}),\cdots,X(t_1)]=E[X(t_n)\,|\,X(t_{n-1})]。$$

7—18　试证独立增量过程 $X(t)$是一个特殊的马尔可夫过程。

〔提示：只要证明独立增量过程$X(t)$具有无后效性即可。〕

7—19　泊松冲激序列$Z(t)=\sum_i \delta(t-t_i)$，这里 t_i 是在时间轴上具有均匀密度 λ 的随机点。过程 $Z(t)$通过一个具有冲激响应 $h(t)=e^{-\alpha t}U(t)$ 的线性系统，在系统的输出得到散粒噪声$X(t)$。试求此散粒噪声的均值、方差、功率谱密度。

7—20　随机电报信号 $X(t)$(其样本函数如图题7-20所示) 满足下述条件：

（1）在任何时刻t，$X(t)$只能取 0 或 1 两个状态。而且，取值为 0 的概率是1/2，取值为 1 的概率也是 1/2，即：$P\{X(t)=0\}=1/2$，$P\{X(t)=1\}=1/2$。

（2）每个状态的持续时间是随机的，若在间隔$(0,t)$内波形变化的次数K服从泊松分布，即

$$P\{K=k\}=P_k(0,t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

式中，λ 为单位时间内波形的平均变化次数。

（3）$X(t)$取何值与随机变量K互为统计独立。试求随机电报信号$X(t)$的均值、自相关函数、自协方差函数、功率谱密度。



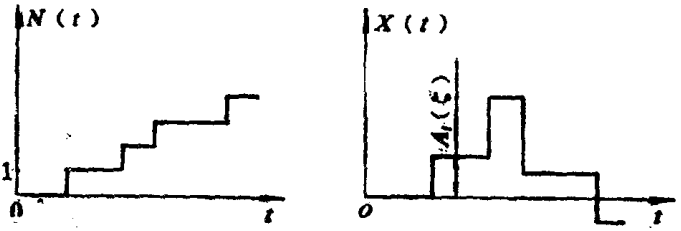
图题 7—20　随机电报信号$X(t)$的一个样本函数

7—21　广义泊松过程。设随机变量A_1，A_2，…，A_n，…是独立的，且具有相同的概率密度$f_A(a)$及特征函数$C_A(u)=E[e^{juA}]$。$N(t)$是一个泊松过程，具有参数 λ，并与 A_n 独立。我们构成一个新过程

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}A_i$$

这是由在 t_i 处发生跳跃（其跃度为 A_i）的一族阶梯函数组成的，图题 7-21 示出了一个样本函数。试证 $X(t)$ 的一维特征函数为

$$C_X(u;t)=e^{\lambda t[C_A(u)-1]}=\exp\left(\lambda t\int_{-\infty}^{\infty}f_A(a)(e^{jua}-1)da\right)$$



图题 7-21　过程 $N(t)$、$X(t)$ 的一个样本函数

〔提示：

$$E\left\{\exp\left(ju\sum_{i=1}^{k}A_i\right)\right\}=C_A^k(u),\quad P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

$$E[\exp(juX(t))]=E\left\{E\left\{\exp\left(ju\sum_{i=0}^{N(t)}A_i\right)\middle|N(t)=k\right\}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}C_A^k(u)P\{N(t)=k\}$$

7—22　试证维纳过程的一维特征函数为

$$C_W(u;t)=e^{-\alpha t u^2/2}$$

7—23　广义维纳过程。已知一个具有参数 α 的维纳过程 $W(t)$，以及两个连续函数 $m(t)$、$v(t)$，其中 $v(t)$ 为非减函数，我们构成一新的随机过程

$$Y(t)=m(t)+W[v(t)]$$

试证 $Y(t)$ 的一维特征函数为

$$C_Y(u;t)=\exp\left\{jum(t)-\frac{1}{2}\alpha v(t)u^2\right\}$$

7—24　已知一维纳过程 $W(t)$，有自相关函数 $R_W(t_1,t_2)=\alpha t_2$ （$t_1>t_2$ 时）；现我们构成一新过程

$$Y(t)=W^2(t)$$

试求：在 $t_1>t_2$ 时，$Y(t)$ 的自相关函数 $R_Y(t_1,t_2)$。

7—25　维纳过程 $W(t)$ 满足扩散方程，现设 $w_1-w_2=x$ 及 $t_1-t_2=t$，向前扩散方程式（7.2.39）便成为

$$\frac{\partial p(x;t)}{\partial t}=\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 p(x;t)}{\partial x^2},\quad p(x;t)\xrightarrow[t\to 0]{}\delta(x),\quad t>0$$

试利用特征函数法，证明

$$p(x;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}}e^{-x^2/2\alpha t}$$

〔要点：设 $p(x;t)$ 关于 x 的傅里叶变换是 $C_W(u;t)$，则

$$\frac{\partial C_W(u;t)}{\partial t}=-\frac{\alpha u^2}{2}C_W(u;t),\quad C_W(u;0)=1$$

故

$$C_W(u;t)=e^{-\alpha t u^2/2}$$

综合练习

综合练习一

1．讨论以下各式所指明的非零均值随机变量X与Y的关系。

（1）$E[XY]=E[X]E[Y]$

（2）$D[X\pm Y]=D[X]+D[Y]$

（3）$E[(X-m_X)(Y-m_Y)]=0$

（4）$r_{XY}=0$

（5）$E[XY]=0$

（6）$E[(X-m_X)(Y-m_Y)]=-E[X]E[Y]$

（7）$D[X\pm Y]=D[X]+D[Y]\mp 2m_Xm_Y$

（8）$E[X+Y]=E[X]+E[Y]$

（9）$C_Z(u)=C_X(u)C_Y(u)$，其中$Z=X+Y$

（10）$F_{XY}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

（11）$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

（12）$f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)$

（13）$f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)$

（14）$C_{XY}(u,v)=C_X(u)C_Y(v)$

（15）$E[X^mY^n]=E[X^m]E[Y^n]$（对于所有的m、$n\geqslant 1$的整数均成立）

2．简要回答：

（1）在分析平稳随机信号的频率结构时，为什么仅研究其功率谱密度，而不象确定信号那样研究其频谱？

（2）试从定义上比较离散时间随机信号的统计特性与连续时间随机信号的统计特性之共同点和不同点。

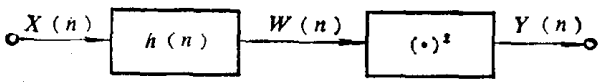
3．已知平稳随机过程$X(t)$的均值$m_X=0$、自相关函数$R_X(\tau)=e^{-|\tau|}$。现在构造一个非平稳随机过程$Y(t)=X(t)+e^{-2t}U(t)$，试求：

（1）$Y(t)$的均值、自相关函数和自协方差函数；

（2）$X(t)$和$Y(t)$的方差，并写出二者的关系式；

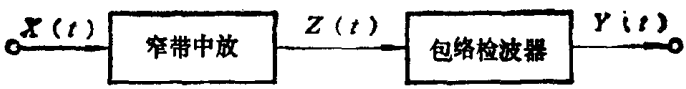
（3）$Y(t)$的功率谱密度。

4．由数字滤波器$h(n)$和平方器组成的系统如图综4所示。已知$X(n)$是一平稳离散时间高斯随机信号，其均值为零、自相关函数为$R_X(m)$。$W(n)=X(n)+\beta X(n-1)$，试求$R_Y(m)$（β为常数）。



图综 4

5．设系统如图综5所示。$X(t)$为白噪声，测得$Z(t)$的平均功率为1W，试求$Y(t)<\sqrt{2}$ V时的概率（设检波系数为1）。



图综 5

〔**解题思路与答案**〕

1．（1）～（4）均指X与Y不相关；（5）～（7）均指X与Y正交；（8）、（9）为一般关系；(10)～(15)均指X与Y统计独立。本题的目的是检查读者是否已弄清两个随机变量之间的正交、不相关、独立的概念及其三者之间的关系，并总结这三种重要概念各自的等价关系式。

3．按照均值、方差、自相关函数、自协方差函数、非平稳随机过程的功率谱密度的定义求诸项。（1）$m_Y(t)=e^{-2t}U(t)$、$R_Y(t_1,t_2)=[e^{-|t_2-t_1|}+e^{-2(t_2+t_1)}]\cdot U(t_1)U(t_2)$、$K_Y(t_1,t_2)=e^{-|t_2-t_1|}U(t_1)U(t_2)$；（2）$\sigma_X^2=1$、$\sigma_Y^2(t)=U(t)$、$\sigma_Y^2(t)=\sigma_X^2U(t)$；

(3) $S_Y(\omega)=\dfrac{2}{1+\omega^2}$。

4．因为$X(n)$是零均值的高斯随机信号，所以$W(n)$亦是零均值的高斯随机信号，则$R_Y(m)=R_W^2(0)+2R_W^2(m)$。因此，只要求得$R_W(m)$就可得$R_Y(m)=[(1+\beta^2)R_X(0)+2\beta R_X(1)]^2+2[(1+\beta^2)R_X(m)+\beta(R_X(m-1)+R_X(m+1))]^2$

5．$Z(t)$为高斯窄带随机过程，其包络在任一时刻的概率密度为瑞利分布。包络检波器的输出$Y(t)$即为$Z(t)$的包络，于是

$$f_Y(y)=ye^{-y^2/2}U(y)$$

$$P[Y(t)<\sqrt{2}]=\int_0^{\sqrt{2}}f_Y(y)dy=1-e^{-1}$$

综合练习二

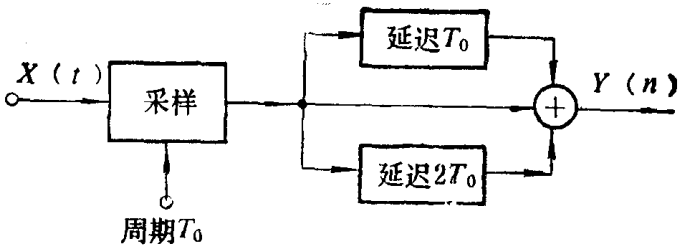
6．简要回答：（1）如何描述一个随机变量？

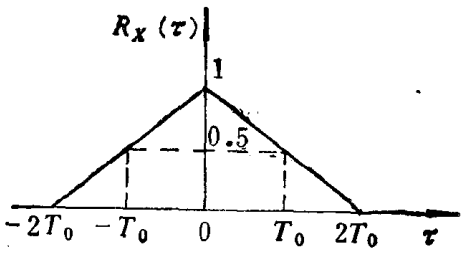
（2）设$X(t)$是平稳随机过程，试问其均值各态历经、任一时刻均方连续与均方可导、在$[a,b]$上均方可积的条件各是什么？

7．已知平稳随机过程$X(t)$的一维概率密度、自相关函数和功率谱密度分别为$f_X(x)$、$R_X(\tau)$和$S_X(\omega)$。试问$f_X(x)$、$R_X(\tau)$和$S_X(\omega)$是否：

（1）必须是偶函数；（2）必须非负；（3）能够确定$X(t)$的均值；（4）能够确定$X(t)$的方差；（5）能够确定$X(t)$的概率密度函数；（6）能够确定$X(t)$的自相关函数；（7）能够确定$X(t)$的功率谱密度。可以分成三个问题：看上述哪几条对$f_X(x)$成立；哪几条对$R_X(\tau)$成立；哪几条对$S_X(\omega)$成立。

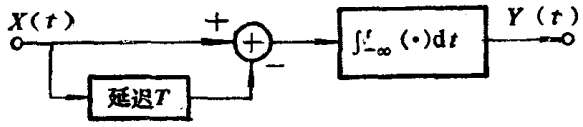
8．设一信号处理系统如图综8所示。已知平稳随机信号$X(t)$的均值为零、方差为1、自相关函数$R_X(\tau)$如图所示。$X(t)$在$t=-\infty$时加入，试求：（1）$R_Y(n,n)$和$R_Y(n,n+1)$；（2）说明间隔几个周期后，$R_Y(n,n+k)=0$。





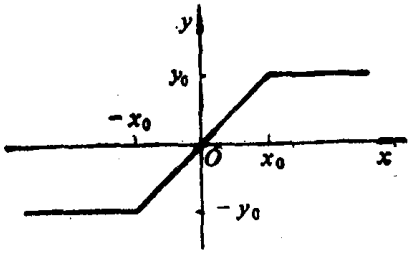
图综 8

9．设一线性系统如图综题9所示。已知$X(t)$和$Y(t)$皆为平稳随机信号，且$S_X(\omega)=N_0/2$，试求系统输出$Y(t)$的平均功率。



图综 9

10．对称限幅器的传输特性如图综10所示。已知输入随机信号$X(t)$的一维概率密度为$f_X(x)$，试求限幅器输出随机信号的一维概率密度$f_Y(y)$。



图综 10

〔解题思路与答案〕

6．（1）可以从以下四个方面分别描述一个随机变量：所有可能的取值；概率密度或分布函数；各阶矩；特征函数。

7．若$X(t)$为非高斯随机过程，则分别对$f_X(x)$、$R_X(\tau)$和$S_X(\omega)$成立的有(2)～(5)；(1)(3)(4)(6)(7)；(1)(2)(3)(4)(6)(7)。若$X(t)$为高斯随机过程，则分别对$f_X(x)$、$R_X(\tau)$和$S_X(\omega)$成立的有(1)～(5)；(1)(3)～(7)；(1)～(7)。

8．记$X(t)$的采样$X(nT_0)$为$X(n)$，$Y(n)$表示$Y(nT_0)$。写出$Y(n)$与$X(n)$之间的关系，根据自相关函数的定义求$R_Y(n, n+k)$。令$k=0$，得$R_Y(n,n)$；令$k=1$，得$R_Y(n,n+1)$。（1）$R_Y(n,n)=5$、$R_Y(n,n+1)=4$；(2)过四个采样周期后$R_Y(n,n+k)=0$。

9．利用频域分析法求$Y(t)$的平均功率。先求出系统的传递函数，进一步可求得$S_Y(\omega)$，然后对$S_Y(\omega)$积分即

$$E[Y^2(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_Y(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{T}{2}N$$

10．根据求非线性系统输出概率密度的方法及概率密度的性质计算$f_Y(y)$。

$$f_Y(y)=A_1\delta(y+y_0)+A_2\delta(y-y_0)$$
$$+\frac{x_0}{y_0}f_X\left(\frac{x_0}{y_0}y\right)[U(y+y_0)-U(y-y_0)]$$

其中　$A_1=\int_{-\infty}^{-x_0}f_X(x)\mathrm{d}x$，$A_2=\int_{x_0}^{\infty}f_X(x)\mathrm{d}x$。

综合练习三

11．选择正确答案：

（1）随机过程的样本函数是

a．确定的时间函数；*b*.随机函数；*c*．随机变量的函数。

（2）若$E[X(t_1)Y(t_2)]=m_X(t_1)m_Y(t_2)$，则随机过程$X(t)$

与$Y(t)$

a. 不相关；b.正交；c.独立。

（3）若联合宽平稳随机过程$X(t)$与$Y(t)$的互功率谱密度$S_{XY}(\omega)=0$，则$X(t)$与$Y(t)$

a. 不相关；b.正交；c.独立。

（4）平稳随机过程的自相关函数$R_X(\tau)$是

a. 只为正的偶函数；b.只为负的奇函数；c.可正负的偶函数。

（5）平稳随机过程的功率谱密度$S_X(\omega)$为

a. 非负的实的偶函数；b.负的偶函数；c.可正负的实的偶函数。

（6）遍历随机过程

a. 必定宽平稳；b.非平稳；c.不一定平稳。

（7）平稳随机过程$X(t)$的均方值为

a. 负的；b.非负的常量；c.时间t的函数。

（8）非平稳随机过程的功率谱密度

a. 存在；b.不存在；c. 没有定义

（9）白噪声通过非高通线性系统后的输出过程服从

a. 高斯分布；b.均匀分布；c.瑞利分布。

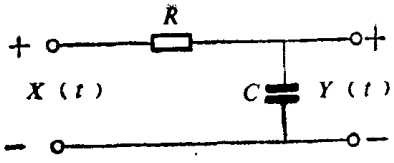
（10）窄带高斯随机过程的包络的平方服从

a. 指数分布；b.瑞利分布；c.高斯分布。

12. 已知$X(nT)$是仅取0或1的二元离散时间马尔可夫过程，记$X_n=X(nT)$，试求$P[X_N=1|X_{N-1}=1]=0.7$时的$P[X_1=1, X_2=1, X_3=1, X_4=1]$。

13. RC滤波器如图综13所示。设随机电报信号$X(t)$的自相关函数$R_X(\tau)=\exp\{-2\mu|\tau|\}$，其中$\mu$为单位时间内符号改变的次数。当功率谱密度为$10^{-6}$W/Hz的白噪声与$\mu=500$次/s的$X(t)$相加通过$RC$滤波器时，要求输出信噪比大于30dB，怎样选择$RC$值？

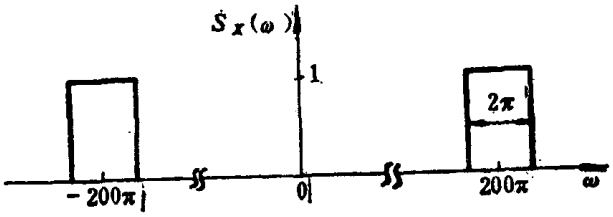
14. 设零均值平稳窄带高斯随机信号$X(t)$的功率谱密度



图综 13

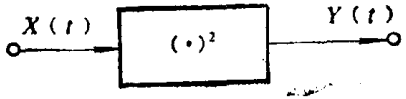
$S_X(\omega)$ 如图综 14 所示。试求：

（1）$R_X(\tau)$和$f_X(x)$；（2）$X(t)$ 包络的一维概率密度、均值和方差；（3）若$X(t)=a(t)\cos 200\pi t-b(t)\sin 200\pi t$，求$R_a(\tau)$。



图综 14

15．如图综15所示的平方器。设 $X(t)$ 为零均值的宽平稳高斯随机信号，试证：（1）$Y(t)$ 也是宽平稳的；（2）$X(t)$ 与 $Y(t)$ 正交且不相关；（3）$r_Y(\tau)=r_X^2(\tau)$。其中 $r_X(\tau)$、$r_Y(\tau)$ 分别为$X(t)$ 和$Y(t)$ 的自相关系数。



图综 15

〔解题思路与答案〕

11．(1) a, (2) a, (3) b, (4) c, (5) a, (6) a, (7) b, (8) a, (9) a, (10) a。

12．从$P\{X_1=1,\ X_2=1,\ X_3=1,\ X_4=1\}=P\{X_4=1|X_3=1,\ X_2=1,\ X_1=1\}\cdot P\{X_3=1,\ X_2=1,\ X_1=1\}=P\{X_4=1|X_3=$

1〕$P〔X_3=1,\ X_2=1,X_1=1〕$开始，并继续这个过程可得，$P〔X_1=1,\ X_2=1,\ X_3=1,\ X_4=1〕=(0.7)^3P〔X_1=1〕=(0.7)^3\times0.5=0.1715$。

13．用频域分析方法，分别计算随机电报信号输入和白噪声输入时RC滤波器输出的平均功率，进一步得二者之比为$\frac{2\times10^6}{b+2\mu}$，其中$b=1/RC$。根据要求得，$\frac{2\times10^6}{b+2\mu}>10^3$，解之，$RC=1/b>10^{-3}$ s。

14．(1)对$S_X(\omega)$进行傅里叶反变换，得$R_X(\tau)=2\cdot\frac{\sin\pi\tau}{\pi\tau}\times\cos200\pi\tau$，并有$\sigma_X^2=R_X(0)=2$，于是$f_X(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2/4}$；(2)记$X(t)$的包络为$A(t)$，求得$f_A(A_t)=\frac{A_t}{2}e^{-A_t^2/4}\cdot U(A_t)$、$E〔A(t)〕=\sqrt{\pi}$、$\sigma_A^2=4-\pi$；(3) $R_a(\tau)=2\frac{\sin\pi\tau}{\pi\tau}$。

15．(1)利用宽平稳的定义和零均值高斯变量的四阶矩证明$Y(t)$的平稳性；(2)利用零均值高斯变量奇阶矩为零的结论证；(3)利用(1)中的结果证。

综合练习四

16．判别正误。若错，请指明错的原因。

(1) 设随机过程$X(t)$与$Y(t)$独立，则$Z(t)=X(t)Y(t)$的一维概率密度$f_Z(z;t)=f_X(x;t)f_Y(y;t)$。

(2) 零均值高斯随机过程$X(t)$两个不同时刻的不相关、正交和独立是相互等价的。

(3) 若$X(t)$是严平稳的，则$X(t_1)$与$X(t_1+C)$具有相同的统计特性。(C为常数)

(4) 若$X(t)$为任意的非高斯的宽平稳随机过程，则

$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_X(x_1,x_2;\tau),\tau=t_2-t_1$。

（5）平稳随机过程的自相关函数具有任意的形状。

（6）联合宽平稳随机过程$X(t)$与$Y(t)$的互功率谱密度$S_{XY}(\omega)$一定为复函数。

（7）高斯随机过程的严平稳与宽平稳等价。

（8）白噪声是根据其概率密度函数的特点定义的。

（9）系统的等效噪声带宽与系统的幅频特性和相频特性均有关。

（10）窄带高斯随机过程的包络和相位过程是两个相互独立的随机过程。

（11）若$R_X(t_1,t_2)=R_X(t_2-t_1)$，则$X(t)$可能宽平稳。

（12）高斯随机过程的严平稳与宽遍历等价。

17.（1）设W、X、Y为联合连续随机变量，证明：$f(w|x,y)f(x|y)=f(w,x|y)$。

（2）若联合随机变量X和Y的各阶联合矩存在，则X与Y统计独立的充要条件是

$$E[X^mY^n]=E[X^m]E[Y^n]$$

对于所有的m、$n\geqslant 1$的整数成立。

18. 设随机信号$X(t)$和$Y(t)$联合遍历

$$X(t)=a\cos(\omega_1 t+\theta)\qquad Y(t)=b\sin(\omega_2 t+\Phi)$$

其中a、b、ω_1、ω_2为实常数，并且$\omega_1\neq\omega_2$；而θ和Φ分别在$[0,2\pi]$上服从均匀分布。试证$X(t)$与$Y(t)$的互相关函数$R_{XY}(\tau)=0$。

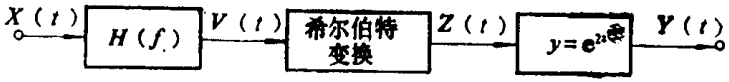
19. 试证高斯随机过程为马尔可夫过程的充要条件是其自协方差函数满足

$$K_X(t_3,t_1)K_X(t_2,t_2)=K_X(t_3,t_2)K_X(t_2,t_1)$$

对于所有的$t_1\leqslant t_2\leqslant t_3$。

20. 某系统如图综20所示。已知$X(t)$是功率谱密度为10^{-4}W/MHz的白噪声及

$$|H(f)|=\begin{cases}100, & |f\pm 100|\leqslant 0.5\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



图综 20

f 的单位为MHz。

（1）求输出随机信号$Y(t)$的一维概率密度$f_Y(y)$。

（2）采用多项式矩函数法，求输出 $Y(t)$ 的自相关函数 $R_Y(\tau)$。

〔解题思路与答案〕

16．(2)(3)(7)(11)正确，其余错。

17．(2) 证明X与Y联合特征函数满足$C_{XY}(u,v)=C_X(u)\times C_Y(v)$即可。证明时，常出现以下两种错误证法。

错误证法1.

$$\because\quad E[X^mY^n]=(-\mathrm{j})^{m+n}\left.\frac{\partial^{m+n}C_{XY}(u,v)}{\partial u^m\partial v^n}\right|_{\substack{u=0\\v=0}}$$

$$E[X^m]=(-\mathrm{j})^m\left.\frac{\mathrm{d}^mC_X(u)}{\mathrm{d}u^m}\right|_{u=0}$$

$$E[Y^n]=(-\mathrm{j})^n\left.\frac{\mathrm{d}^nC_Y(v)}{\mathrm{d}v^n}\right|_{v=0}$$

$$E[X^mY^n]=E[X^m]E[Y^n]$$

$$\therefore\quad (-\mathrm{j})^{m+n}\left.\frac{\partial^{m+n}C_{XY}(u,v)}{\partial u^m\partial v^n}\right|_{\substack{u=0\\v=0}}$$

$$=(-\mathrm{j})^m\left.\frac{\mathrm{d}^mC_X(u)}{\mathrm{d}u^m}\right|_{u=0}\cdot(-\mathrm{j})^n\left.\frac{\mathrm{d}^nC_Y(v)}{\mathrm{d}v^n}\right|_{v=0}$$

$$=(-\mathrm{j})^{m+n}\left.\frac{\partial^{m+n}[C_X(u)C_Y(v)]}{\partial u^m\partial v^n}\right|_{\substack{u=0\\v=0}}$$

则比较上式两边得

$$C_{XY}(u,v)=C_X(u)C_Y(v)$$

故X与Y统计独立。

错误的原因：误认为两个函数在同一点的导数值相等，两个

函数就一定相等。这在一般情况下是不成立的，反之则成立。

错误证法2.

$$\because \quad E[X^m]=\int_{-\infty}^{\infty} x^m f_X(x)\,dx$$

$$E[Y^n]=\int_{-\infty}^{\infty} y^n f_Y(y)\,dy$$

$$E[X^mY^n]=\iint_{-\infty}^{\infty} x^m y^n f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$E[X^mY^n]=E[X^m]E[Y^n]$$

$$\therefore \quad \iint_{-\infty}^{\infty} x^m y^n f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x^m f_X(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty} y^n f_Y(y)\,dy$$

$$=\iint_{-\infty}^{\infty} x^m y^n f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy$$

比较上式两端得

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

因此X和Y统计独立。

错误的原因：误认为在同一区间上两个函数的积分相等，那么各自积分的被积函数就相等。一般来说，同一区间上定积分相等，不一定被积函数相等，但被积函数相等则在同一区间上的积分值相等。

18. 证明$\overline{X(t)Y(t+\tau)}=0$即可。

19. 利用切普曼-柯尔莫哥洛夫方程证明对于马尔可夫过程有

$$E\{E[X(t_3)\,|\,X(t_2)]\,|\,X(t_1)\}=E[X(t_3)\,|\,X(t_1)]$$

再从此式出发证明该题。

20. (1)论证$V(t)$、$Z(t)$皆为高斯过程，再根据已知条件

求$V(t)$的$S_V(\omega)$和$R_V(\tau)$，在此基础上求$Z(t)$的m_Z、$R_Z(\tau)$、σ_Z^2，可得$f_Z(z)$，最后利用求非线性系统输出概率密度函数的方法，求得$f_Y(y)=\frac{1}{4\sqrt{\pi y}}\cdot\exp(-(\ln y)^2/16)\cdot U(y)$。(2)把$e^{2z}$展成级数，求得$R_Y(\tau)=\exp\{8+4R_Z(\tau)\}$，其中$R_Z(\tau)=2\cdot\frac{\sin\pi\tau}{\pi\tau}\times\cos 200\pi\tau$。该问若采用下列方法求解，则相当容易：$R_Y(\tau)=E[Y(t)Y(t+\tau)]=E[e^{2Z(t)}\cdot e^{2Z(t+\tau)}]=C_Z\left(\frac{2}{j},\frac{2}{j},\tau\right)=\exp\{8+4R_Z(\tau)\}$，其中$C_Z\left(\frac{2}{j},\frac{2}{j};\tau\right)$是$Z(t)$的特征函数。

综合练习五

21．若随机变量θ在$[0,2\pi]$上服从均匀分布，$X=\cos\theta$、$Y=\cos(\theta+a)$，这里a是常数。试讨论X与Y的独立、正交及不相关问题。

22．(1)已知平稳随机过程$X(t)$的自相关函数$R_X(\tau)$以T为周期，证明：对于任意的t恒有

$$E\{[X(t)-X(t+T)]^2\}=0$$

从而推出等式$X(t+T)=X(t)$依概率成立。

(2)证明平稳随机过程$X(t)$均方连续的充要条件是$\lim_{\tau\to 0}R_X(\tau)=R_X(0)$。

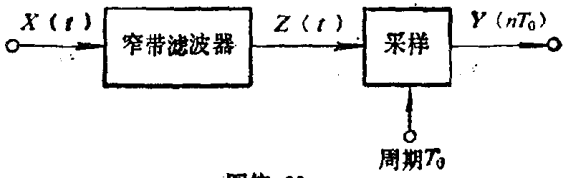
23．(1)证明平稳随机过程$X(t)$的自相关函数$R_X(\tau)$为半正定的，即对任何可积函数$f(\tau)$有

$$\int_a^b\int_a^b f(\tau)R_X(\tau-\lambda)f^*(\lambda)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda\geqslant 0$$

式中$f^*(\tau)$是$f(\tau)$的复共轭。并由该结论证明平稳随机过程的功率谱密度为非负的。

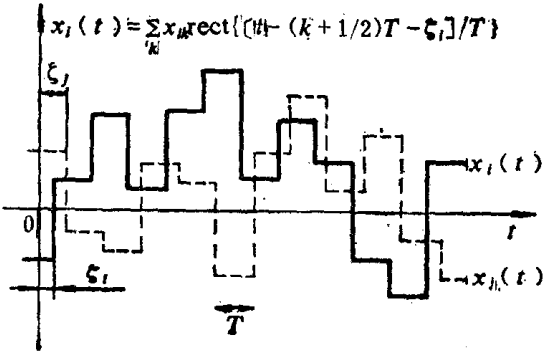
(2)如图综23所示。设$X(t)$为白噪声，窄带滤波器的带

宽为Ω，试问T_0满足什么条件才能使$Y(nT_0)$为独立的离散时间过程？



图综 23

24.（1）设某随机过程$X(t)$的幅度值x在每T秒间隔之后改变，而在这个间隔期间内是一常数。其中两个典型的样本函数$x_i(t)$和$x_j(t)$如图综24所示。在原点之后，第一个改变的位置ζ对随机过程$X(t)$的每一个样本函数是不同的，但它在$[0, T]$上服从均匀分布。又设不同间隔内$X(t)$的幅度值x_k是相互统计独



图综 24

立的。试求$X(t)$的功率谱密度$S_X(\omega)$。

（2）在（1）中，若$X(t)$为M元传输波形，$X(t)$的幅度值是离散随机变量：$P\left[X=\frac{M}{2}\right]=P\left[X=\frac{M}{2}-1\right]=P\left[X=\frac{M}{2}-2\right]=\cdots\cdots=P[X=1]=P[X=-1]=\cdots\cdots=P\left[X=-\frac{M}{2}+1\right]=P\left[X=-\frac{M}{2}\right]=\frac{1}{M}$（$M$为正偶数），重做(1)。

25．某接收机的简化原理图如图综25所示。已知 $N(t)$ 是功率谱密度为 $N_0/2$ 的泊松分布的白噪声，中频放大器的频率特性为

$$H_1(\omega)=\begin{cases}K_0, & |\omega-\omega_0|\leqslant\dfrac{\Delta\omega}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

RC积分电路的单位冲激响应 $h(t)=re^{-rt}U(t)$。试求：（1）随机过程$Y(t)$ 的概率密度；（2）稳态情况下，随机过程 $Z(t)$ 的均值；（3）随机过程$Y(t)$ 的自相关函数。



图综 25

〔解题思路与答案〕

21．正交性与相关性：$R_{XY}=E[XY]=\dfrac{1}{2}\cos a$，$r_{XY}=\dfrac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\cos a$。当$a=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$时，$R_{XY}=0$、$r_{XY}=0$，即这时$X$与$Y$正交且不相关；当$a\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$时，$R_{XY}\neq0$、$r_{XY}\neq0$，即$X$与$Y$非正交且相关。其中当$a=2k\pi$时，$r_{XY}=1$，$X=Y$，即 X与Y线性相关；当 $a=(2k+1)\pi$ 时，$r_{XY}=-1$，$X=-Y$，即X与Y线性相关。独立性：$Y=X\cos a-\sqrt{1-x^2}\sin a$，当 $a=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$时，$r_{XY}=0$，X与Y不相关。这时却有 $X^2+Y^2=1$，因此X与Y不独立。其中 $k=0,1,2,3,\cdots$。

22．（1）根据切比雪夫不等式，证明$P\{|X(t)-X(t+T)|\geqslant\varepsilon\}=0$。

23．（1）从$E\left[\left|\int_a^b f(t)X(t)\,dt\right|^2\right]\geqslant0$出发，证$R_X(\tau)$ 的

半正定性；根据该结论和从$S_X(\omega)=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}E[|X_X(T,\omega)|^2]$出发证$S_X(\omega)\geqslant 0$. (2) $T_0\gg\dfrac{1}{\Omega}$。

24. (1) 记$X_1=X(t)$ 和$X_2=X(t+\tau)$，分$|\tau|>T$或$|\tau|\leqslant T$两种情况计算$R_X(\tau)$。当$|\tau|>T$时，根据题设，已知X_1和X_2独立，因此，$R_X(|\tau|>T)=E[X(t)X(t+\tau)]=E[X_1X_2]=E[X_1]\times E[X_2]=m_X^2$。当$|\tau|\leqslant T$时，

$$R_X(\tau)=R_X(|\tau|\leqslant T)=\begin{cases}E[X^2]=\sigma_X^2+m_X^2, & X_1=X_2\\ E[X_1]E[X_2]=m_X^2, & X_1\neq X_2\end{cases}$$

即

$$R_X(|\tau|\leqslant T)=(\sigma_X^2+m_X^2)P\{x_1=x_2\}+m_X^2P\{x_1\neq x_2\}$$

当在$|\tau|$间隔内$X(t)$ 的幅度值发生变化时，即当$\zeta<|\tau|$时，事件$x_1\neq x_2$发生，于是

$$\begin{aligned}P\{x_1\neq x_2\}&=P\{\zeta<|\tau|\}=F_\zeta(|\tau|)\\&=\int_{-\infty}^{|\tau|}f_\zeta(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\int_0^{|\tau|}\frac{1}{T}\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{|\tau|}{T}\end{aligned}$$

考虑到 $P\{x_1=x_2\}+P\{x_1\neq x_2\}=1$，得

$$\begin{aligned}R_X(|\tau|\leqslant T)&=(1-|\tau|/T)(\sigma_X^2+m_X^2)+(|\tau|/T)m_X^2\\&=(1-|\tau|/T)\sigma_X^2+m_X^2\end{aligned}$$

综合以上两种情况，得

$$R_X(\tau)=\sigma_X^2\mathrm{tri}(\tau/T)+m_X^2$$

于是

$$S_X(f)=\sigma_X^2T\left[\frac{\sin\pi fT}{\pi fT}\right]+m_X^2\delta(f)$$

其中$f=\omega/2\pi$。

(2) $m_X=0$，$\sigma_X^2=\dfrac{1}{12T}M(M+1)(M+2)$

25. (1) 论证 $X(t)$ 为窄带高斯噪声，写$X(t)$为式(5.21)

和式（5.24）所表示的形式，求出 $\sigma_X^2=K_0^2N_0\Delta\omega/2\pi$，$Y(t)=A^2(t)$，于是 $f_Y(y)=\frac{1}{2\sigma_X^2}\exp\{-y/2\sigma_X^2\}\cdot U(y)$。(2) $E[Z(t)]=E[Y(t)]\int_0^\infty h(t)\,dt=2\sigma_X^2$。（3）根据 $a(t)$、$b(t)$ 的有关性质（见第五章），计算 $R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)Y(t_2)]=E[A^2(t_1)\,A^2(t_2)]=E\{[a^2(t_1)+b^2(t_1)][a^2(t_2)+b^2(t_2)]\}=4\sigma_X^4+4R_a^2(\tau)$，其中 $R_a(\tau)=N_0^2K_0^2(\Delta\omega)^2\pi^{-2}[1+\sin^2(\Delta\omega\tau/2)/(\Delta\omega\tau/2)^2]$。

综合练习六

26．基本概念

（1）指出以下二者间的关系：*a*.维纳过程与高斯过程；*b*.独立增量过程与泊松过程；*c*.平稳过程的功率谱密度和均值；*d*.自相关函数与平均功率。

（2）确定信号和随机信号分别经希尔伯特变换后，相应的频谱和功率谱密度有何变化？

（3）信号加噪声经线性变换后的信噪比与非线性变换后的信噪比有何不同？

（4）定义遍历过程有何工程意义？

27．设随机过程 $X(t)$ 由以下四个样本函数组成

$$X(t,\zeta_1)=\cos t \qquad X(t,\zeta_2)=-\cos t$$

$$X(t,\zeta_3)=\sin t \qquad X(t,\zeta_4)=-\sin t$$

它们的出现是等可能的。试证 $X(t)$ 是宽平稳的，而非严平稳的。

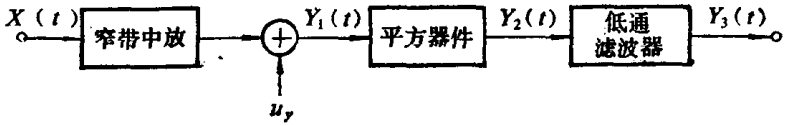
28．在图综28所示的系统中，$X(t)$ 是功率谱密度 $S_X(\omega)=N_0/2$ 的白噪声，中放的频率响应特性

$$H_1(\omega)=\begin{cases}C_0, & |\omega-\omega_0|\leqslant\Delta\omega/2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

u_i 为直流电压，平方器件的传输特性为 $y_2=ay_1^2$，低通滤波器的频率响应特性

$$H_3(\omega)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\omega\leqslant\Delta\omega\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试求随机过程$Y_1(t)$、$Y_2(t)$ 和$Y_3(t)$ 各自的一维概率密度。



图综 28

29. 多级单调谐中放的传递函数为

$$H(\omega)=C_0\exp[-(\omega-\omega_0)^2/2\beta]$$

其输入端接入电流$I(t)=\sum_i q\delta(t-t_i)$，$q$为电子的电荷数，已知泊松冲激序列$Z(t)=\sum_i \delta(t-t_i)$的相关函数 $R_Z(\tau)=\lambda^2+\lambda\delta(\tau)$。如果中放输出的噪声$V(t)$ 的均值m_V和均方差σ_V 可以测出，问如何求输入冲激序列每秒的平均个数λ?

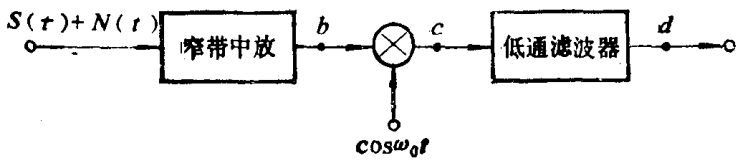
30. 同步检波器如图综30所示。中放的频率响应特性为

$$H_1(\omega)=\begin{cases}C_0, & |\omega-\omega_0|\leqslant\Delta\omega/2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

调幅信号$s(t)=a(1+m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t$，白噪声 $N(t)$ 的功率谱密度为$S_N(\omega)=N_0/2$，低通滤波器的传递函数为

$$H_2(\omega)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\omega\leqslant\Delta\omega/2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求检波器输入端 b 点和输出端 d 点的信噪比。



图综 30

〔解题思路与答案〕

27. $m_X(t)=E[X(t)]=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}X(t,\zeta_i)=0$、$R_X(t_1,t_2)=$

$E[X(t_1)X(t_2)]=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}X(t_1,\zeta_i)X(t_2,\zeta_i)=\frac{1}{2}\cos(t_2-t_1)$。

求$f_X(x_1,0)$和$f_X(x_1,\pi/4)$，根据严平稳的定义证$X(t)$非严平稳。

28. 解题思路见综合题25(1)。并利用求非线性系统输出概率密度的方法进行求解。$f_{Y_1}(y_1)=(\sqrt{2\pi}\,\sigma_{X_1})^{-1}\exp[-(y_1-u_y)^2/2\sigma_{X_1}^2]$、$f_{Y_2}(y_2)=\mathrm{ch}(\sqrt{y_2/a}\cdot u_y/\sigma_{X_1}^2)\cdot(\sqrt{2\pi a y_2}\,\sigma_{X_1})^{-1}\times\exp[-(y_2+au_y^2)/2a\sigma_{X_1}^2]U(y_2)$、$f_{Y_3}(y_3)=(a\sigma_{X_1}^2)^{-1}\cdot\exp[-(y_3-au_y^2)/a\sigma_{X_1}^2]U(y_3)$，其中$\sigma_{X_1}^2=(2\pi)^{-1}\Delta\omega C_0^2N_0$是中放输出的方差。

29. 根据线性系统的频域分析方法，求出$V(t)$的自相关函数$R_V(\tau)$，再由$R_V(\tau)$求出m_V^2和σ_V^2，解含有λ的m_V^2和σ_V^2方程组，得$\lambda=m_V^2\sigma_V^{-2}\sqrt{\beta/4\pi}\,\exp[\omega_0^2/\beta]$。

30. 分别写出b点信号和噪声的时域波形表达式，从而求得b点的信噪比$(S/N)_b=\pi a^2(2+m^2)/2\Delta\omega N_0$。同理，求得$d$点的信噪比$(S/N)_d=\pi a^2(2+m^2)/N_0\Delta\omega$。

综合练习七

31. 简要回答以下问题：

（1）为什么平稳随机过程的自相关函数可以有负值，而其功率谱密度不能有负值？

（2）随机过程的导数过程与确知信号对时间的微分有何不同？

（3）从频域上看，随机信号的线性变换和非线性变换之间有何主要差别？

（4）对随机信号的采样和对确定信号的采样有何差别？

（5）已知窄带高斯随机信号可以表示成式(5.24)的形式，试问 $R_X(t_1,t_2)=E[A(t_1)A(t_2)]\cdot E[\cos(\omega_0 t_1+\varphi(t_1)\cdot\cos(\omega_0 t_2+\varphi(t_2)]$是否正确？

32．设正弦波随机过程$X(t)=\cos(\omega_0 t+\Theta)$，$-\infty<t<\infty$；其中$\omega_0$是常数，$\Theta$在$[0,2\pi]$上服从均匀分布。试证$X(t)$是严平稳的。

33．设离散时间系统的差分方程为

$$y(n)-ay(n-1)=x(n)$$

其中$x(n)$、$y(n)$分别为输入、输出；a为复数。若该系统的输入为$X(n)=(V+\mathrm{j}W)\delta(n)$，其中$V$和$W$是实随机变量，它们的均值分别为$m_V$和$m_W$、方差分别为$\sigma_V^2$和$\sigma_W^2$、互协方差$K_{VW}=\sigma_V\sigma_W\times r_{VW}$。若定义$R_Y(n_1,n_2)=E[Y(n_1)Y^*(n_2)]$，试证

$$m_Y(n)=(m_V+\mathrm{j}m_W)(a)^n U(n)$$

$$R_Y(n_1,n_2)=(m_V^2+m_W^2+\sigma_V^2+\sigma_W^2)(a)^{n_1}(a^*)^{n_2}U(n_1)U(n_2)$$

式中“*”表示复共轭。

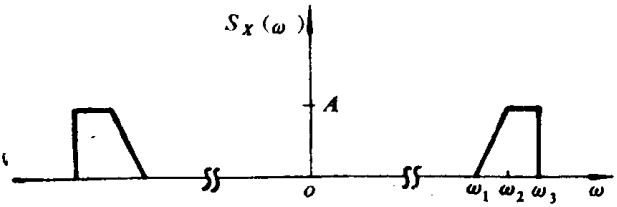
34．已知带通随机信号

$$X(t)=a(t)\cos(\omega_0 t+\Theta)-b(t)\sin(\omega_0 t+\Theta)$$

的功率谱密度如图综34所示。Θ是与$a(t)$、$b(t)$相互独立的，且是$[0,2\pi]$上均匀分布的随机变量。假设$\omega_3-\omega_2=\omega_2-\omega_1$及$\omega_0>\omega_3-\omega_1$。试求：以下五种情况下，$a(t)$和$b(t)$的功率谱密度$S_a(\omega)$、$S_b(\omega)$和$S_{ab}(\omega)$。

（1）$\omega_0=\omega_1$；（2）$\omega_0=\omega_2$；（3）$\omega_1<\omega_0<\omega_2$；

（4）$\omega_0=\omega_3$；（5）$\omega_2<\omega_0<\omega_3$

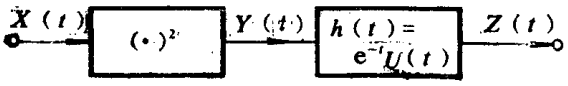


图综 34

35．如图综35所示的系统的输入$X(t)$为平稳高斯随机信号，通过实验测得$Z(t)$的功率谱密度为

$$S_Z(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{2\beta}{(\omega^2+\beta^2)(\omega^2+1)}$$

试分别求$X(t)$和$Y(t)$的自相关函数。



图综 35

〔解题思路与答案〕

32．根据严平稳随机过程的定义证。

33．根据单侧随机信号通过离散时间系统的时域分析方法——卷积和法证。

34．利用式（5.36）、式（5.37）及$S_a(\omega)$的求取方法解该题。结果用图表示较容易和简明，这里从略。

35．利用$S_Z(\omega)=|H(\omega)|^2S_Y(\omega)$，求出$S_Y(\omega)$；对$S_Y(\omega)$进行傅里叶反变换得$R_Y(\tau)=\frac{1}{2}+e^{-\beta|\tau|}$。再利用关系式$R_Y(\tau)=R_X^2(0)+2R_X^2(\tau)$，求得$X(t)$的自相关函数

$$R_X(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\beta|\tau|/2}$$

综合练习八

36．简述下列名词的含义：高斯随机过程、高斯白噪声、平稳高斯随机过程、马尔可夫高斯随机过程、遍历高斯随机过程、离散时间高斯随机过程。

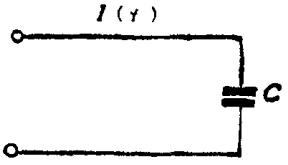
37．设$X_1(t)$和$X_2(t)$是两个相互独立的宽平稳随机过程，它们的“物理”功率谱密度分别为

$$G_{X_1}(\omega)=N_1,\quad |\omega-\omega_1|\leqslant\Delta/2;$$

$$G_{X_2}(\omega)=N_2,\quad |\omega-\omega_2|\leqslant\Delta/2$$

其中 N_1，N_2 是正实常数。令 $\omega_2>\omega_1+\Delta$、$\omega_1\gg\Delta$，求 $Y(t)=X_1(t)X_2(t)$ 的“物理”功率谱密度 $G_Y(\omega)$。

38.（1）如图综38所示，从 $t=0$ 时刻开始在电容器上作用一个随机电流 $I(t)$。已知 $m_I=0$、$R_I(\tau)=\dfrac{N_0}{2}\delta(\tau)$，试求电容器上在 t 时刻电压的方差。



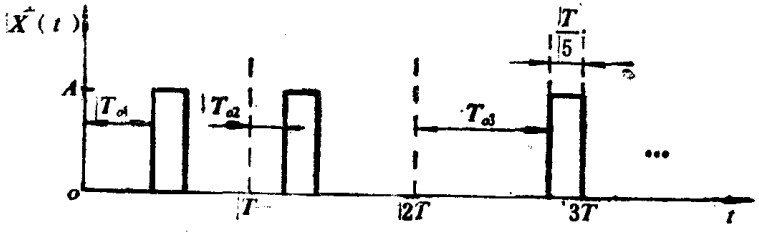
图综 38

（2）已知离散时间随机信号

$$X(n)=W(n)+\sum_{k=1}^{p}a_k\cos(\omega_k n+\Theta_k)$$

式中 $W(n)$ 是均值为零、方差为 σ_W^2 的白噪声，a_k 为实常数，$\Theta_k(k=1,2,\cdots,p)$ 是在 $[-\pi,\pi]$ 上均匀分布的相互独立的随机变量，$W(n)$ 与正弦项不相关。试求 $X(n)$ 的功率谱密度 $S_X(\omega)$。

39. 设某随机过程 $X(t)$（$0\leqslant t<\infty$）的一个样本函数如图综39所示。在每 T 秒间隔内有一个方波脉冲，其起始时间 T_0 是区间 $[0,4T/5]$ 上的均匀随机变量。已知不同间隔上的脉冲是统计独立的，且脉冲幅度为 A、宽度为 $T/5$。试求 $X(t)$ 的一维概率



图综 39

密度$f_X(x;t)$。

40．电路如图综13所示。设其输入和输出为$X(t)$和$Y(t)$。已知$S_X(\omega)=N_0/2, RC=N_0/4$。现对输出$Y(t)$作等间隔采样，令$Y_1=Y(t_1)$、$Y_2=Y(t_2)$、$Y_3=Y(t_3)$，且$t_3-t_2=t_2-t_1$、$t_3>t_2>t_1$。试证输出过程$Y(t)$的条件概率密度满足如下关系

$$f(y_1|y_2,y_3)=f(y_1|y_2)$$

即$Y(t)$是马尔可夫过程。

〔解题思路与答案〕

37．求得$R_Y(\tau)=R_{X_1}(\tau)R_{X_2}(\tau)$，于是$S_Y(\omega)=\frac{1}{2\pi}S_{X_1}(\omega)*S_{X_2}(\omega)$，最后得

$$G_Y(\omega)=2S_Y(\omega)u(\omega)$$

$$=\begin{cases}\frac{N_1N_2}{4\pi}[\Delta-|\omega-(\omega_2-\omega_1)|], & |\omega-(\omega_2-\omega_1)|\leqslant\Delta\\ \frac{N_1N_2}{4\pi}[\Delta-|\omega-(\omega_2+\omega_1)|], & |\omega-(\omega_2+\omega_1)|\leqslant\Delta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

若令$\omega_1<\omega_2<\omega_1+\Delta/2$，请读者求$G_Y(\omega)$。

38．（1）设$V(t)$为电容器两端的电压，$V(t)=\frac{1}{C}\int_0^t I(v)\,dv$ $\sigma_V^2=\frac{N_0}{2C^2}tU(t)$、（2）$S_X(\omega)=\sigma_W^2+\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{p}a_k^2[\delta(\omega+\omega_k)+\delta(\omega-\omega_k)]$。

39．根据题意

$$f_{T_0}(t_0)=5/4T,\quad 0\leqslant t_0\leqslant 4T/5$$

由于不同周期间隔上的脉冲是统计独立的，所以仅在$X(t)$的第一个周期内考虑问题。记T_{01}为T_0，于是写出

$$X(t)=\begin{cases}A, & T_0\leqslant t\leqslant T_0+\frac{T}{5}\\ 0, & 0\leqslant t\leqslant T_0\text{及}T_0+\frac{T}{5}\leqslant t\leqslant T\end{cases}$$

现在把区间$T_0 \leqslant t \leqslant T_0 + T/5$写成如下的等价形式

$$t - T/5 \leqslant T_0 \leqslant t$$

即当$t - T/5 \leqslant T_0 \leqslant t$时，$X(t) = A$。又因为$T_0$在$(0, 4T/5)$内取值，所以相应的$t$应满足$T/5 \leqslant t \leqslant 4T/5$。考虑到$t$在$[0, T]$内取值，于是$t$在$[0, T]$内的另两个取值范围是$0 \leqslant t \leqslant T/5$和$4T/5 \leqslant t \leqslant T$。

下面分别求t在区间$(0, T/5)$、$(T/5, 4T/5)$和$(4T/5, T)$内时，$X(t) = A$的概率。

当$0 \leqslant t \leqslant T/5$时，因为$T_0$决不会小于零，所以，$0 \leqslant T_0 \leqslant t$，则

$$P\{X(t) = A\} = P\{0 \leqslant T_0 < t\} = \int_0^t f_{T_0}(t_0)\,\mathrm{d}t_0$$

$$= \int_0^t \frac{5}{4T}\,\mathrm{d}t_0 = \frac{5}{4T}\,t$$

当$T/5 \leqslant t \leqslant 4T/5$时，$t - \frac{T}{5} \leqslant T_0 < t$，则

$$P\{X(t) = A\} = P\left\{t - \frac{T}{5} \leqslant T_0 < t\right\} = \int_{t-T/5}^t f_{T_0}(t_0)\,\mathrm{d}t_0$$

$$= \int_{t-T/5}^t \frac{5}{4T}\,\mathrm{d}t_0 = \frac{1}{4}$$

当$4T/5 \leqslant t \leqslant T$时，因为$T_0$决不会大于$4T/5$，所以$t - T/5 \leqslant T_0 < 4T/5$，则

$$P\{X(t) = A\} = P\left\{t - \frac{T}{5} \leqslant T_0 < \frac{4T}{5}\right\} = \int_{t-T/5}^{4T/5} f_{T_0}(t_0)\,\mathrm{d}t_0$$

$$= \int_{t-T/5}^{4T/5} \frac{5}{4T}\,\mathrm{d}t_0 = \frac{5}{4T}(T - t)$$

综合以上得

$$P\{X(t)=A\}=\begin{cases}\dfrac{5t}{4T}, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{T}{5}\\ \dfrac{1}{4}, & \dfrac{T}{5}\leqslant t\leqslant\dfrac{4T}{5}\\ \dfrac{5}{4T}(T-t), & \dfrac{4T}{5}\leqslant t\leqslant T\end{cases}$$

且

$$P\{X(t)=0\}=1-P\{X(t)=A\}$$
$$=\begin{cases}1-\dfrac{5t}{4T}, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{T}{5}\\ \dfrac{3}{4}, & \dfrac{T}{5}\leqslant t\leqslant\dfrac{4T}{5}\\ \dfrac{5t}{4T}-\dfrac{1}{4}, & \dfrac{4T}{5}\leqslant t\leqslant T\end{cases}$$

故$X(t)$的概率密度为

$$f_X(x;t)=P\{X(t)=0\}\delta(x)+P\{X(t)=A\}\delta(x-A)$$

40. $Y(t)$为高斯随机过程。因此，可以有两种方法证明该题。方法一是利用综合练习题19的结论；方法之二是分别求出$f(y_1,y_2,y_3)$、$f(y_1,y_2)$、$f(y_2,y_3)$、$f(y_2)$，在此基础上求$f(y_1|y_2,y_3)$和$f(y_1|y_2)$。

综合练习九

41.（1）已知$S(\omega)$是某随机过程的功率谱密度，试问$d^2S(\omega)/d\omega^2$是否能作为其它随机过程的功率谱密度？为什么？

（2）对于两个零均值、联合宽平稳随机过程$X(t)$和$Y(t)$，已知$\sigma_X^2=6$、$\sigma_Y^2=10$，试问下列函数能否适应于这两个随机过程？为什么？

$$a.\ R_{XY}(\tau)=8(1-\tau^2)^{-1}\quad b.\ R_Y(\tau)=2+8\sin 5\tau/5\tau$$

42. 已知平稳随机过程$X(t)$的均值为零、自相关函数

$R_X(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau$，试求$Y(t)=aX(t)+b\dfrac{dX(t)}{dt}$的功率谱密度$S_Y(\omega)$。$a$、$b$为常数。

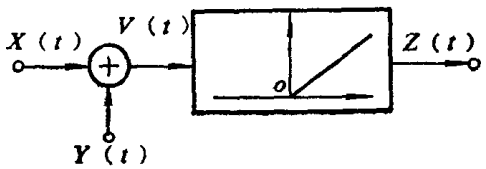
43．设描述一线性时不变离散时间系统的差分方程为

$$y(n)-0.5y(n-1)=x(n)+x(n-1)$$

$y(n)$、$x(n)$分别为输出和输入。若其输入为平稳离散时间信号$X(n)$，并且$R_X(m)=(0.25)^{|m|}$，试计算

（1）$R_Y(m)$和$R_{YX}(m)$；（2）$S_Y(\omega)$和$S_{YX}(\omega)$；（3）当$X(n)$为高斯过程时的$f_Y(y)$。

44．如图综44所示的系统。设$X(t)$和$Y(t)$是相互独立的平稳随机过程，且都均匀分布于$(-2,2)$之上，试求输出$Z(t)$的一维概率密度。



图综 44

45．设一非线性系统的传输特性为

$$y=g(x)=\left(\frac{2}{\pi\alpha}\right)^{1/2}\int_0^x e^{-z^2/2\alpha}\,dz$$

已知其输入$X(t)$是均值为零、自相关函数为$R_X(\tau)$的平稳高斯随机过程，试证输出随机过程$Y(t)$的自相关函数为

$$R_Y(\tau)=R_Y(0)\frac{\arcsin[r_X(\tau)/(1+\eta)]}{\arcsin[1/(1+\eta)]}$$

其中

$$\eta=\frac{\alpha}{R_X(0)}\qquad r_X(\tau)=\frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

〔解题思路与答案〕

41．（1）一般说不能，但有例外。因为

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^2S(\omega)}{\mathrm{d}\omega^2}=\int_{-\infty}^{\infty}(-\tau^2)R(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

令 $R_1(\tau)=-\tau^2R(\tau)$. 假设$\frac{\mathrm{d}^2S(\omega)}{\mathrm{d}\omega^2}$是某随机过程的功率谱密度的话，那么$R_1(\tau)$ 应为该过程的自相关函数。因此，$R_1(\tau)$ 应具备平稳过程自相关函数的基本性质。例如，对于所有的τ值应存在

$$|R_1(\tau)|\leqslant R_1(0)=0$$

当$R_1(\tau)=0$时，上式成立；然而，当$R_1(\tau)\neq 0$时，上式不成立。因此，说$\frac{\mathrm{d}^2S(\omega)}{\mathrm{d}\omega^2}$一般不能作为某随机过程的功率谱密度。

例外情况如图综38所示。若电容器两端作用的是功率谱密度为$N_0/2$的白噪声电压$V(t)$，则$I(t)$ 的功率谱密度$S_I(\omega)=(\omega C)^2\times N_0/2$，从而$\frac{\mathrm{d}^2S_I(\omega)}{\mathrm{d}\omega^2}=N_0C^2=$常数 $(-\infty<\omega<\infty)$。显然，$\frac{\mathrm{d}^2S_I(\omega)}{\mathrm{d}\omega^2}$是一白噪声的功率谱密度。为什么会出现这种情况，请读者考虑。

（2）(a)、(b) 均不能。

42. $S_Y(\omega)=\alpha\sigma^2(a^2+b^2\omega^2)\left[\frac{1}{\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2}+\frac{1}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2}\right]$

43. 利用频域分析方法较简单。

（1）$R_Y(m)=12.84\left(\frac{1}{2}\right)^{|m|}-7.14\left(\frac{1}{4}\right)^{|m|}$，

$$R_{YX}(m)=1.43(4)^nU(-n-1)-5\left(\frac{1}{4}\right)^nU(n)$$

$$+6.43\left(\frac{1}{2}\right)^nU(n)$$

（2） $S_Y(\omega)=\dfrac{30(1+\cos\omega)}{5-4\cos\omega}\cdot\dfrac{1}{\left(4-e^{j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$

$$S_{YX}(\omega)=\frac{15(1+e^{-j\omega})}{4\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(4-e^{j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

（3） $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\exp(-y^2/2\sigma_Y^2)$，$\sigma_Y^2=5.7$

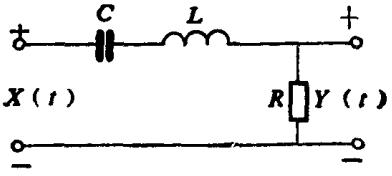
44．求出$f_V(v)$，最后求得 $f_Z(z)=\dfrac{1}{2}\delta(z)+\dfrac{1}{16b}\left(4-\dfrac{1}{b}z\right)\cdot[U(z)-U(z-4b)]$，其中$b$为半波线性检波器的斜率。

45．利用普赖斯方法证明。

综合练习十

46．（1）已知$X(t)$是均值为m、方差为σ^2的平稳高斯随机过程。令$Y(t)=aX(t)$，a为常数。试写出$X(t)$和$Y(t)$的联合概率密度$f_{XY}(x,y;t)$。

（2）电路如图综46所示。已知白噪声$X(t)$的功率谱密度$S_X(\omega)=1$，试求输出随机过程$Y(t)$的相关时间τ_0。



图综 46

47．设某离散时间系统的差分方程为

$$y(n)+ay(n-1)=bx(n)$$

式中$a<1$，$x(n)$是输入，$y(n)$是输出。若令输入为

$$X(n)=[s+W(n)]U(n)$$

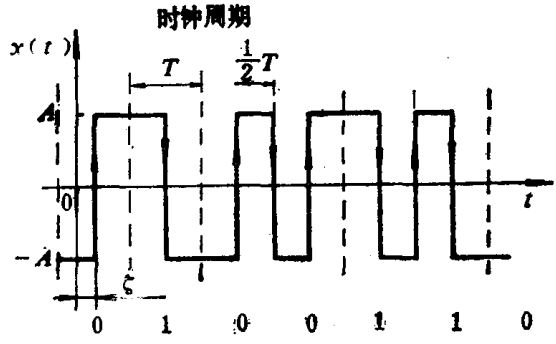
其中$W(n)$是均值为零、方差为σ_W^2的不相关离散时间过程，a是常数。试求输出过程$Y(n)$的均值$m_Y(n)$和方差$\sigma_Y^2(n)$。

48．已知非线性系统的传输特性为

$$y=g(x)=x^3$$

设其输入$X(n)$是均值为零、方差为σ_X^2的平稳离散时间高斯-马尔可夫过程，并且$X(n)$的自相关函数$R_X(m)$满足$R_X(1)=a\sigma_X^2$，其中$|a|\leqslant 1$。试求该系统输出随机过程$Y(n)$的自相关函数$R_Y(m)$。

49．时钟两相二元随机信号$X(t)$的一个典型的样本函数如图综49所示。图中二元信息符号“0”和“1”表示该样本函数波形的转换。例如，用“1”表示波形向负的方向转变，用“0”表示波形向正的方向转变。这种转换总是发生在相应时钟周期的中点。假设“0”和“1”是统计独立的，且二者的发生是等可能的，随机变量ζ在时钟周期T上服从均匀分布。试求该随机信号$X(t)$的功率谱密度$S_X(\omega)$，并作图。

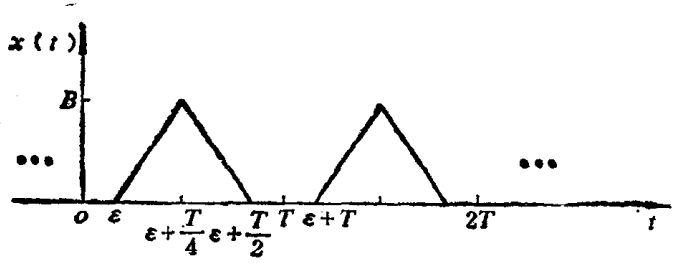


综图 49

50．已知周期随机过程$X(t)$的一个典型样本函数如图综50所示，周期为T，且B、T为常量，ε是均匀分布于$(0,T)$上的随机变量。试求$X(t)$的一维分布函数、一维概率密度、均值和方差。

〔解题思路与答案〕

46．（1）$f_{XY}(x,y;t)=(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\exp\{-(x-m)^2/2\sigma^2\}$



综图 50

$\times\delta(y-ax)$。（2）$\tau_0=\alpha/(\alpha^2+\omega_0^2)$，其中 $\alpha=R/2L$、$\omega_0=(LC)^{-1/2}$。

47. $m_Y(n)=b(1+a)^{-1}[1-(-a)^{n+1}]sU(n)$

$\sigma_Y^2(n)=b^2(1-a^2)^{-1}[1-(a^2)^{n+1}]\sigma_W^2U(n)$

48. 先利用综合题19的结论证明$R_X(m)=\sigma_X^2(a)^{|m|}$，$m=0$、$\pm1$、$\pm2$、…。再利用题6—13的结论，令 $n=3$，求得 $R_Y(m)=3\sigma_X^6\times[2(a)^{3|m|}+3(a)^{|m|}]$。

49. 分别求$|\tau|>T$、$|\tau|\leqslant T/2$和$T/2\leqslant|\tau|\leqslant T$时的$P\{x_{1i}=\pm A,\ x_{2j}=\pm A;\tau\}$，其中下标1和2表示相距 τ 时间间隔的两个随机变量、i 和 j 是两个可能的状态。然后根据公式

$$R_X(\tau)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}x_{1i}(t)x_{2j}(t+\tau)\cdot P\{x_{1i}=\pm A,\ x_{2j}=\pm A;\tau\}$$

求得

$$R_X(\tau)=A^2[2\mathrm{tri}(2\tau/T)-\mathrm{tri}(\tau/T)]$$

式中

$$\mathrm{tri}(t)=\begin{cases}1-|t|, & |t|\leqslant1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

最后得

$$S_X(f)=TA^2\left[\frac{\sin^2(\pi Tf/2)}{(\pi Tf/2)^2}-\frac{\sin^2(\pi Tf)}{(\pi Tf)^2}\right]$$

其中 $f=\omega/2\pi$。

50.

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}(1+x/B), & 0\leqslant x\leqslant B\\ 1, & x\geqslant B\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\delta(x)+1/2B, & 0\leqslant x\leqslant B\\ 0, & x<0 \text{ 及 } x>B\end{cases}$$

$$E[X(t)]=B/4$$

$$\sigma_X^2=5B^2/48$$

习题答案

第 一 章

1—1 $P=0.357$

1—2 $P=0.388$

1—3 $P=0.452$

1—4 $P=0.664$

1—5 $P=0.328$

1—6 $P=\frac{r^2}{R^2}$

1—7 $P=1-\frac{r}{a}$

1—8 $P=(a-2r)^2/a^2$

1—9 $P=0.5$

1—10 $P=\frac{2l}{\pi a}$

1—11 (1) $P(0.01\mu F|盒子2)=\frac{95}{210}$; (2)$P(盒子3|0.01\mu F)\approx 0.1474$

1—12 设D为不合格的事件。(1)$P(D|10W)=\frac{15}{100}$; (2)$P(D\cap 50W)=\frac{3}{200}$; (3)$P(D)=\frac{1}{8}$

1—13 (1) $P=0.0006$; (2) $P(A故障|B故障)=0.02$; (3) 两事件不是统计独立的。

1—14 $P\approx 0.973$

1—16 (1)$A=1$; (2) $P\{0.3<X<0.7\}=0.4$;

(3) $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & x<0或x>1\end{cases}$

1—17 (1) $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{\pi}$;

(2) $P\left\{-1<x<1\right\}=\frac{1}{2}$;

(3) $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty<x<\infty$

1—18 (1)$P\left\{X<\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{4}$; (2) $P\left\{\frac{1}{4}<X<\frac{1}{2}\right\}=\frac{3}{16}$

1—19 (1) $A=\frac{1}{2}$; (2) $P\{0<X<1\}\approx 0.316$;

(3) $F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$

1—20 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 1\leqslant y\leqslant 4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

1—21 $f_Y(y)=\frac{1}{\pi \mathrm{ch} y}$, $|y|<\infty$

1—22 (1) $P\{Y\geqslant 2X\}=\frac{3}{5}$; (2) 1) $P(A)=(1-e^{-at_0})(1-e^{-at_0/3})$;

2) $P(B)=e^{-\frac{4a}{3}t_0}$; 3) $P(\overline{A})=e^{-at_0}+e^{-\frac{a}{3}t_0}-e^{-\frac{4a}{3}t_0}$

1—23 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}e^{-(x-m_X)^2/2\sigma_X^2}$, $-\infty<x<\infty$

$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}e^{-(y-m_Y)^2/2\sigma_Y^2}$, $-\infty<y<\infty$

1—24 (1) $A=\frac{3}{\pi R^2}$; (2) $P=\frac{r^2}{R^2}(3R-2r)$

1—25 $P\{X>Y\}=\frac{2}{5}$

1—27

Y	10	19	22
p_n	0.2	0.1	0.7

1—28 $F_I(i)=\begin{cases}0, & i<\frac{v}{55}\\ \frac{1}{10}\left(55-\frac{v}{i}\right), & \frac{v}{55}\leqslant i\leqslant\frac{v}{45}\\ 1, & i>\frac{v}{45}\end{cases}$

$f_I(i)=\begin{cases}\frac{v}{10i^2}, & \frac{v}{55}\leqslant i\leqslant\frac{v}{45}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

1—29 $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y/3}(1-e^{y/6}), & y\geqslant 0\\ 0, & y<0\end{cases}$

1—30 $f_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ (e-1)e^{-z}, & z>1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

1—31 $f_R(r)=\begin{cases}\frac{1}{15000}(600r-60r^2+r^3), & 0\leqslant r\leqslant 10\\ \frac{1}{15000}(8000-1200r+60r^2-r^3), & 10<r\leqslant 20\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

1—32 $f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)=\frac{1}{|ad-bc|}f_{X_1X_2}\left(\frac{dy_1-by_2}{ad-bc},\ \frac{-cy_1+ay_2}{ad-bc}\right)$

1—33 (1) $f_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)=f_{X_1}(y_1)\,f_{X_2}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\frac{1}{|y_1|}$;

(2) $f_{Y_2}(y_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|y_1|}f_{X_1}(y_1)\,f_{X_2}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)dy_1$

1—34 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi y}\,\sigma_X}e^{-2y/\sigma_X^2}, & 0<y<\infty\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

1—35 $f_Y(y)=1/\{3\pi[(y-2)^{2/3}+(y-2)^{4/3}]\}$

1—36 (1) $f_{Y_1}(y_1)=\frac{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}{\pi(\sigma_{X_1}^2+\sigma_{X_2}^2y_1^2)}$; (2) $f_{Y_2}(y_2)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-y_2^2/4}$

1—37

Y	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
p_m	0.3	0.7

1—38 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

1—39 $f_Y(y)=\frac{a}{\pi(a^2+y^2)}$, $-\infty<y<\infty$

1—40 $f_{Z\Phi}(z,\varphi)=\frac{z}{2\pi\sigma^2}e^{-z^2/2\sigma^2}$, $z\geqslant 0$, $|\varphi|\leqslant\pi$

1—41 (1) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{5}{32}x^4, & 0<x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{5}{48}y(8-y^3), & 0<y<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

（2）X与Y不是统计独立的。

1—42 (1) $C=\frac{3}{4}$; (2) $E[X]=\frac{11}{16}$

1—43 $E[Y]=\frac{\pi^2-8}{4}$

1—45 $E[Y]=n$

1—46 $E[X]=0$, $D[X]=2$

1—47 (1) $f_Y(y)=\frac{1}{5}[\delta(y+192)+\delta(y+3)+\delta(y-24)+\delta(y-81)+\delta(y-192)]$; (2) $E[Y]=20.4$; (3) $D[Y]=15758.64$

1—48 (1) $A=\frac{1}{2}$; (2) $m_X=m_Y=\frac{\pi}{4}$; (3) $\sigma_X^2=\sigma_Y^2\approx 0.188$;

(4) $K_{XY}\approx -0.046$, $r_{XY}\approx -0.245$

1—49 $m_V=3$, $m_W=7$; $\sigma_V^2=4.8$, $\sigma_W^2=17.8$; $r_{VW}\approx 0.1298$

1—50 (1) $m_{20}=E[X^2]=0.36$, $m_{02}=E[Y^2]=5.16$, $m_{11}=E[XY]=0.6$; (2) $\sigma_X^2=0.36$, $\sigma_Y^2=5.16$; (3) $r_{XY}\approx 0.44$

1—53 (1) $E[XY]=-0.45$; (2) $K_{XY}=-0.325$;

(3) $r_{XY}\approx -0.272$。X与Y是相关的，但它们是不正交的。

1—54 (1) $\alpha\approx 2.17$, $(K_{XY})_{\min}\approx -0.25$; (2) X与Y是相关的。

1—55 X与Y是不正交的，但它们是不相关及统计独立的。

1—56 (1) $m_Y=11.5$; (2) $\sigma_Y^2=20.75$

1—58 a、b、c、e、f可以是任意的，但是，$d=-\left(\frac{aK_{XY}+b\sigma_Y^2}{a\sigma_X^2+bK_{XY}}\right)e$

1—59 $|a|=\sqrt{E[X_1^2]/E[X_2^2]}$时，$Y$与$Z$正交。

1—61 X与Y互为统计独立。

1—62 (1) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}, & |x|\leqslant R\\ 0, & |x|>R\end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}, & |y|\leqslant R\\ 0, & |y|>R\end{cases}$$

(2) $$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}}, & |x|\leqslant\sqrt{R^2-y^2}\\ 0, & |x|>\sqrt{R^2-y^2}\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}, & |y|\leqslant\sqrt{R^2-x^2}\\ 0, & |y|>\sqrt{R^2-x^2}\end{cases}$$

1—64 $C_X(u)=\dfrac{\alpha}{\alpha-ju}$

1—65 $C_X(u)=\dfrac{\alpha^2}{u^2+\alpha^2}$

1—66 $C_X(u)=e^{-\alpha|u|}$

1—68 (1)$C_X(u)=e^{-\lambda(1-e^{ju})}$, (2)$m_X=\lambda$, $\sigma_X^2=\lambda$

1—70 $$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi a y\sigma}}e^{-y/2a\sigma^2}, & y\geqslant 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

1—71 $C_Y(u)=(1-j2u)^{-n/2}$

1—72 $f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=\alpha\beta e^{-(\alpha x_1+\beta x_2)}U(x_1)U(x_2)$

1—74 $r(X^2,Y^2)=r^2$

第 二 章

2—1 (2)此过程为离散型随机过程；(3) 过程$X(t)$不是确定性过程。

2—2 (1)是；(2) $f_X(x)=0.6\delta(x-1)+0.3\delta(x-2)+0.1\delta(x-3)$

2—3 $$f_X(x_1,t_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi|\cos\omega_0 t_1|}}\exp\left(-\frac{x_1^2}{2\cos^2\omega_0 t_1}\right),$$

$-\infty<x_1<\infty$

2—4 (1) $E[X(t)]=E[A]+E[B]t$, $R_X(t_1,t_2)=E[A^2]+E[AB](t_1+t_2)+E[B^2]t_1t_2$; (2) $f_X(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_A(a)f_B(x-a,t)\mathrm{d}a$

2—5 $E[Y(t)]=m_X(t)+\varphi(t)$, $K_Y(t_1,t_2)=K_X(t_1,t_2)$

2—6 $E[X(t)]=0$, $R_X(t_1,t_2)=\sigma^2\cos\omega_0(t_2-t_1)$

2—7 $E[X(t)]=\dfrac{t}{2}$, $R_X(t_1,t_2)=\dfrac{t_1t_2}{3}$

2—8 $m_X(t)=10\sin3t$, $\sigma_X^2(t)=0.2\sin^23t$,

$R_X(t_1,t_2)=100.2\sin3t_1\sin3t_2$, $K_X(t_1,t_2)=0.2\sin3t_1\sin3t_2$

2—9 $m_X(t)=4t+7t^2$, $\sigma_X^2(t)=0.1t^2+2t^4$, $R_X(t_1,t_2)=16.1t_1t_2$

$+28(t_1t_2^2+t_1^2t_2)+51t_1^2t_2^2$, $K_X(t_1,t_2)=0.1t_1t_2+2t_1^2t_2^2$

2—10 $m_X(t)=\sin t+8\cos t$, $\sigma_X^2(t)=4$, $R_X(t_1,t_2)=5\sin t_1\sin t_2$

$+68\cos t_1\cos t_2+8\sin(t_1+t_2)$, $K_X(t_1,t_2)=4\cos(t_2-t_1)$

2—11 $m_X(t)=\cos2t+2\sin t+t$, $\sigma_X^2(t)=3\cos^22t+4\sin^2t$,

$R_X(t_1,t_2)=4\cos2t_1\cos2t_2+2(\cos2t_1\sin t_2+\sin t_1\cos2t_2)+(t_2\cos2t_1$

$+t_1\cos2t_2)+8\sin t_1\sin t_2+2(t_2\sin t_1+t_1\sin t_2)+t_1t_2$, $K_X(t_1,t_2)$

$=3\cos2t_1\cos2t_2+4\sin t_1\sin t_2$

2—13 $R_Y(t_1,t_2)=R_X(t_1+a,t_2+a)-R_X(t_1,t_2+a)-R_X(t_1+a,t_2)$

$+R_X(t_1,t_2)$

2—15 $m_Y(t)=3t^2$

2—16 $m_Y(t)=4\,e^{3t}(3\cos2t-2\sin2t)$, $R_Y(t_1,t_2)$

$=17e^{3(t_1+t_2)}\times(3\cos2t_1-2\sin2t_1)(3\cos2t_2-2\sin2t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$

$=e^{3(t_1+t_2)}(3\cos2t_1-2\sin2t_1)(3\cos2t_2-2\sin2t_2)$, $\sigma_Y^2(t)$

$=e^{6t}(3\cos2t-2\sin2t)^2$

2—17 $m_Y(t)=\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{4}\sin2t$, $R_Y(t_1,t_2)=\dfrac{\sin\omega_0t_1\sin\omega_0t_2}{\omega_0^2}$

$+\left(\dfrac{t_1}{2}+\dfrac{1}{4}\sin2t_1\right)\left(\dfrac{t_2}{2}+\dfrac{1}{4}\sin2t_2\right)$, $K_Y(t_1,t_2)=\dfrac{\sin\omega_0t_1\sin\omega_0t_2}{\omega_0^2}$,

$\sigma_Y^2(t)=\dfrac{\sin^2\omega_0t}{\omega_0^2}$

2—18 (1) $m_Y(t)=2.5\sin2t$, $R_Y(t_1,t_2)=\dfrac{31}{4}\sin2t_1\sin2t_2$,

$K_Y(t_1,t_2)=1.5\sin2t_1\sin2t_2$, $\sigma_Y^2(t)=1.5\sin^22t$; (2) $m_Y(t)$

$=2(1-\cos t)$, $R_Y(t_1,t_2)=7(1-\cos t_1)(1-\cos t_2)$, $K_Y(t_1,t_2)$

$=3(1-\cos t_1)(1-\cos t_2)$, $\sigma_Y^2(t)=3(1-\cos t)^2$

2—19 $m_Y(t)=\dfrac{\sin3t}{3t}$, $R_Y(t_1,t_2)=\dfrac{2\sin3t_1\sin3t_2}{9t_1t_2}$,

$$K_Y(t_1,t_2)=\frac{\sin 3t_1\sin 3t_2}{9t_1t_2},\quad \sigma_Y^2(t)=\left(\frac{\sin 3t}{3t}\right)^2$$

2—21 因为 $E[X(t)]=0$，$R_X(t,t+\tau)=\sigma^2\cos\omega_0\tau$，$E[X^2(t)]=\sigma^2<\infty$，所以，$X(t)$是广义平稳过程。

2—23 因为$R_Z(t,t+\tau)=2R_X(\tau)+R_X(t,t_0+\tau)+R_X(t_0,t+\tau)$，所以，$Z(t)$为非（宽）平稳过程。

2—24 因为 $m_X(t)=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\omega_0 t+\varphi)\cos\varphi\,d\varphi$，所以，$X(t)$为非平稳过程。

2—25 因为$m_X(t)=\frac{a}{\sqrt{e}}\sin\omega_0 t$，所以，$X(t)$是非平稳过程。

2—26 （1）$E[Y(t)]=0$，$R_Y(t,t+\tau)=\frac{1}{2}R_X(\tau)\cos\omega_0\tau=R_Y(\tau)$；

（2）$Y(t)$为宽平稳过程。

2—28 (1) $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_A}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_A^2}}$；(2) 因为 $R_X(t,t+\tau)=\sigma_A^2\cos\pi t\cos\pi(t+\tau)$，所以，$X(t)$ 不是宽平稳过程。

2—29 因为$E[X(t)]=\frac{1}{3}(2+2\cos t+3\sin t)$，所以，在任何意义上，过程$X(t)$不是平稳的。

2—30 $E[X^2(t)]=5$，$\sigma_X^2=5$

2—31 $r_{XY}(\tau)=\sin\tau$

2—32 （1）$R_Z(t,t+\tau)=R_X(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau)+R_Y(\tau)=R_Z(\tau)$；(2)$R_Z(\tau)=R_X(\tau)+2m_Xm_Y+R_Y(\tau)$；(3)$R_Z(\tau)=R_X(\tau)+R_Y(\tau)$

2—33 (1)$R_{W_1}(t,t+\tau)=e^{-|\tau|}+\cos 2\pi\tau=R_{W_1}(\tau)$；

（2）$R_{W_2}(t,t+\tau)=e^{-|\tau|}+\cos 2\pi\tau=R_{W_2}(\tau)$；

(3) $R_{W_1W_2}(t,t+\tau)=e^{-|\tau|}-\cos 2\pi\tau=R_{W_1W_2}(\tau)$

2—34 （1）$R_Y(t,t+\tau)=\frac{a^4}{4}\left(1+\frac{1}{2}\cos 2\omega_0\tau\right)=R_Y(\tau)$；

（2）$R_{XY}(t,t+\tau)=0$

2—35 （1）$\mathscr{R}_X(t,t+\tau)=\frac{1}{2}a^2\cos\tau=\mathscr{R}_X(\tau)$，$R_X(t,t+\tau)=\frac{1}{2}E[a^2]\cos\tau=R_X(\tau)$；（2）$a$为常数时，$\mathscr{R}_X(\tau)=R_X(\tau)$

2—36 $X(t)$不具有遍历性。

2—38 (1)、(2)、(4)、(7)、(9)能成为平稳过程的自相关函数。

2—39 它们都不是自相关函数的正确形式。

2—40 过程$X(t)$是平稳的，但它是非遍历的；$R_X(\tau)=4\dfrac{\sin 5\tau}{5\tau}$

2—41 $m_Z=0$，$\sigma_Z^2=260$，$R_Z(\tau)=26\,e^{-2|\tau|}\cos\omega_0\tau\cdot(9+e^{-3|\tau^2|})$

2—42 (1) $R_{XY}(t_1,t_2)=aR_X(\tau-\tau_1)+R_{XN}(\tau)$，$\tau=t_2-t_1$；

(2) $R_{XY}(t_1,t_2)=aR_X(\tau-\tau_1)$

2—43 $R_{XY}(\tau)=\dfrac{1}{2}ab\sin\omega_0\tau$，$R_{YX}(\tau)=-\dfrac{1}{2}ab\sin\omega_0\tau$；$\tau=0$时，

$R_{XY}(0)=R_{YX}(0)=0$，说明$X(t)$与$Y(t)$互为正交。

2—46 (1) $R_X^*(\tau)=2e^{-0.5\tau^2}\ (1-\tau^2)$，$\sigma_X^{*2}=2$；(2) $\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_X^{*2}}=1$

2—47 $R_X^*(\tau)=\alpha^2De^{-\alpha|\tau|}\ (1-\alpha|\tau|)$，$\sigma_X^{*2}=\alpha^2D$

2—48 (1) $R_X^*(\tau)=3e^{-2|\tau|}(ch\tau-2sh|\tau|)$；(2) $[R_X^*(\tau)]_{max}=3$

2—49 $P=0.4772$

2—50 (1) $R_{Z_1Z_2}(t,t+\tau)=R_{X_1X_2}(t,t+\tau)-R_{Y_1Y_2}(t,t+\tau)$

$-j[R_{X_1Y_2}(t,t+\tau)+R_{Y_1X_2}(t,t+\tau)]$；(2) $R_{Z_1Z_2}(t,t+\tau)$

$=E[Z_1^*(t)]E[Z_2(t+\tau)]$；(3) $R_{Z_1Z_2}(t,t+\tau)=0$

2—52 $R_Z(t,t+\tau)=E[V^2]\,e^{j\omega_0\tau}$

2—53 $E[Z^*(t)Z(t+\tau)]=e^{j\omega_0\tau}$，$E[Z(t)Z(t+\tau)]=0$

2—57 是。

2—60 (1)
$$K=6\begin{bmatrix}1 & e^{-1/2} & e^{-1} & e^{-3/2}\\ e^{-1/2} & 1 & e^{-1/2} & e^{-1}\\ e^{-1} & e^{-1/2} & 1 & e^{-1/2}\\ e^{-3/2} & e^{-1} & e^{-1/2} & 1\end{bmatrix}$$

(2)
$$K=6\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

第 三 章

3—1 (1) 过程$X(t)$不是宽平稳的。(2) $X(t)$的功率

$$Q=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X^2(t)]dt=\frac{a^2}{2}。(3)\ S_X(\omega)=\frac{\pi a^2}{2}。$$

$\cdot[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$；$X(t)$的功率 $Q=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{a^2}{2}$。先后求得的$X(t)$的功率值是相等的，二者皆为$a^2/2$。

3—2 (1)过程$X(t)$为非（宽）平稳的。(2)$X(t)$的功率 $Q=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E[X^2(t)]\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{4}$。(3)$S_X(\omega)=\frac{\pi a^2}{4}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$；$X(t)$的功率$Q=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{a^2}{4}$。由此可见，先后求得的$X(t)$的功率值皆为$a^2/4$，它们完全相等。

3—3 (1) $Q=4$；(2) $Q=2$

3—4 $E[X^2(t)]=4$

3—5 (1) $S_X(s)=\frac{16(-s^2+36)}{s^4-13s^2+36}$；(2)零点：$\pm6$，极点：$\pm2$、$\pm3$。

3—6 (1)$S_X(\omega)=\frac{1}{\omega^2+36}$；(2)$E[X^2(t)]=\frac{1}{12}$

3—7 $E[X^2(t)]=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$

3—8 只有(1)、(6)两个函数是功率谱密度，其它皆不是。

3—9 只有$S_2(\omega)$是功率谱密度的正确表达式，其它都不是。对于$S_2(\omega)$，则有自相关函数 $R_2(\tau)=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}|\tau|}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\mathrm{e}^{-\sqrt{2}|\tau|}$、均方值 $R_2(0)=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}$。

3—10 (2) $R_X(\tau)=\sigma^2\cos\omega_0\tau$；(3) $S_X(\omega)=\pi\sigma^2[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

3—14 (1) $S_X(\omega)=\frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}$；(2) $S_X(\omega)=\frac{\alpha}{(\omega-\omega_0)^2+\alpha^2}+\frac{\alpha}{(\omega+\omega_0)^2+\alpha^2}$；(3) $S_X(\omega)=\sqrt{2\pi}\,ab\mathrm{e}^{-a^2\omega^2/2}$；

(4) $S_X(\omega)=\frac{2}{\omega^2T}(1-\cos\omega T)=T\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2$

3—15 $S_X(\omega)=\frac{\pi a}{2}\left[\frac{3}{2}\delta(\omega)+\delta(\omega-2\omega_0)+\delta(\omega+2\omega_0)\right.$

$$+\frac{1}{4}\delta(\omega-4\omega_0)+\frac{1}{4}\delta(\omega+4\omega_0)],\quad Q=a$$

3—16 (1) $S_X(\omega)=\frac{4}{(\omega+\pi)^2+1}+\frac{4}{(\omega-\pi)^2+1}+\pi[\delta(\omega+3\pi)$

$+\delta(\omega-3\pi)]$; (2) $\frac{768}{\omega^4+20\omega^2+64}$

3—17 (1) $R_X(\tau)=\frac{\omega_0}{\pi}\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0\tau}$; (2) $R_X(\tau)=\frac{4}{\pi}+\frac{100}{\pi}\left(\frac{\sin5\tau}{5\tau}\right)^2$

3—18 $S_X(\omega)=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

3—19 $R_Y(t,t+\tau)=\frac{1}{2}R_X(\tau)\cos\omega_0\tau=R_Y(\tau)$,

$S_Y(\omega)=\frac{1}{4}[S_X(\omega+\omega_0)+S_X(\omega-\omega_0)]$

3—23 (1)为了使$W(t)$是(宽)平稳的，需要$X(t)$、$Y(t)$各自平稳，且有：$E[X(t)]=E[Y(t)]=0$，$R_X(\tau)=R_Y(\tau)$，$R_{XY}(\tau)$

$=-R_{YX}(\tau)=-R_{XY}(-\tau)$; (2)$S_W(\omega)=\frac{1}{2}[S_X(\omega-\omega_0)$

$+S_X(\omega+\omega_0)-\mathrm{j}S_{XY}(\omega-\omega_0)+\mathrm{j}S_{XY}(\omega+\omega_0)]$; (3)$S_W(\omega)$

$=\frac{1}{2}[S_X(\omega-\omega_0)+S_X(\omega+\omega_0)]$

3—24 $S_{XY}(\omega)=2\pi m_X m_Y\delta(\omega)$，$S_{XZ}(\omega)=S_X(\omega)+2\pi m_X m_Y\delta(\omega)$

3—26 (2)$A\langle R_{XY}(t,t+\tau)\rangle=\frac{am_V}{2}\cos\omega_0\tau=R_{XY}(\tau)$,

$S_{XY}(\omega)=\frac{\pi am_V}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

3—30 (1) $S_Z(\omega)=1$; (2)$S_{XY}(\omega)=0$; (3)$S_{XZ}(\omega)=\frac{16}{\omega^2+16}$

3—31 $S_{ZV}(\omega)=\frac{16-\omega^2}{16+\omega^2}$

3—32 $S_{\dot{X}\dot{X}}(\omega)=\mathrm{j}\frac{4D\alpha^3\omega}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$

3—33 $S_{\dot{X}\dot{X}}(\omega)=\mathrm{j}2\sqrt{\pi}\,\omega\,\mathrm{e}^{-\omega^2/4}$

第四章

4—1 $Y(t)=\frac{5}{3}M+\frac{20}{13}[3\cos(2t+\theta)+2\sin(2t+\theta)]$

4—2 $Y(t)=\frac{a}{1+\omega_0^2}[(1-\omega_0^2)\sin(\omega_0 t+\theta)-2\omega_0\cos(\omega_0 t+\theta)]$

4—3 $Y(t)=20\sin(2\pi t+\theta)$；$m_Y=0$；$\sigma_Y^2=200$

4—4 $m_Y=\frac{a}{\alpha}$

4—5 $m_Y=\frac{a\omega_0}{W^2+\omega_0^2}$

4—6 $m_Y=0.2222\mathrm{V}$；$E[Y^2(t)]=0.0864\mathrm{V}^2$；$\sigma_Y^2=0.0370\mathrm{V}^2$

4—7 $m_Y=0$；$E[Y^2(t)]=12.8$

4—8 $R_Y(\tau)$：0.8571，0.4170，0.1236；

$R_{XY}(\tau)$：0.8571，0.7180，0.2315；

$R_{YX}(\tau)$：0.8571，-0.1180，-0.0183；

4—9 $m_Y=0$；$E[Y^2(t)]=5$；$\sigma_Y^2=5$；

$R_{XY}(\tau)=10[U(\tau)-U(\tau-0.5)]$

4—10 $m_Y=0$；$E[Y^2(t)]=8e^{-1}$；$\sigma_Y^2=8e^{-1}$；

$$R_{XY}(\tau)=\begin{cases}8(1-e^{-1})e^{2\tau}, & \tau<0\\ 8(2-e^{2\tau-1}-e^{-2\tau}), & 0\leqslant\tau\leqslant 0.5\\ 8(e-1)e^{-2\tau}, & \tau\geqslant 0.5\end{cases}$$

4—11 总平均功率＝交流平均功率＝ 8

4—12 $E[Y^2(t)]=\frac{2}{3}A^2$；

$$R_Y(\tau)=\begin{cases}\frac{A^2}{T^3}\left(\frac{|\tau|^3}{2}-T\tau^2+\frac{2}{3}T^3\right), & |\tau|\leqslant T\\ \frac{A^2}{T^3}\left(-\frac{4}{3}|\tau|^3+\frac{19}{3}T\tau^2-\frac{29}{3}T^2|\tau|+\frac{14}{3}T^3\right), & T\leqslant\tau\leqslant 2T\text{和}-2T\leqslant\tau\leqslant -T\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

4—13 $R_{YZ}(\tau)=50e^{-1000\tau}U(\tau)-50e^{1000\tau}U(-\tau)$

4—14 $m_Y=\pm\frac{3}{2}$；$E[Y^2(t)]=\frac{35}{12}$；

$$R_Y(\tau)=\begin{cases}\dfrac{35}{12}-3|\tau|+4\tau^2-\dfrac{5}{3}|\tau|^3, & |\tau|\leqslant 1\\ \dfrac{9}{4}, & \text{其它}\tau\end{cases}$$

$$R_{XY}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{13}{2}-2\tau, & 0\leqslant\tau\leqslant 1\\ \dfrac{9}{2}, & \text{其它}\end{cases}$$

$$R_{YX}(\tau)=R_{XY}(-\tau)$$

4—16 不会。

4—17 $E[Y^2(t)]=\dfrac{9}{10}s_0$

4—18 $$R_{XY}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{r+a}{r-b}e^{-r\tau}-\dfrac{2r(a+b)}{r^2-b^2}e^{-b\tau}, & \tau>0\\ \dfrac{r-a}{r+b}e^{r\tau}, & \tau<0\end{cases}$$

4—20 $E[Y(t)]=(m_{X_1}+m_{X_2})\int_0^\infty h(t)\,dt$

$$R_Y(t,t+\tau)=[R_{X_1}(\tau)+R_{X_2}(\tau)+R_{X_1X_2}(\tau)+R_{X_2X_1}(\tau)]*h(\tau)*h(-\tau)$$

4—21 $R_{WY}(t,t+\tau)=R_X(\tau)*h_1(\tau)*h_2(\tau)*h_1(-\tau)$

4—22 (1) $\sigma_Y^2=\dfrac{2}{3}\times 10^{-2}$; (2) $\sigma_Y^2=\dfrac{47}{3}\times 10^{-4}$

(3) $\sigma_Y^2=\dfrac{29}{3}\times 10^{-4}$

4—23 $S_Y(s)=\dfrac{5/2}{(s^2-2)(s^2-4)}$;

$$R_Y(\tau)=\frac{5\sqrt{2}}{16}e^{-\sqrt{2}|\tau|}-\frac{5}{16}e^{-2|\tau|};$$

$E[Y^2(t)]=\dfrac{5}{16}(\sqrt{2}-1)$; $E[\varepsilon^2(t)]\approx 2.63$

4—24 $S_Y(\omega)=\dfrac{\omega^2}{(9\omega^2+1)(\omega^2+4)}$

4—25 $S_Y(\omega)=\dfrac{(\omega L)^2N_0/2}{R^2+(\omega L)^2}$; $R_Y(\tau)=\dfrac{N_0}{2}\delta(\tau)-\dfrac{RN_0}{4L}e^{-R|\tau|/L}$

4—26 $S_Y(\omega) = \dfrac{N_0}{2} \cdot \dfrac{(\omega CR)^2}{1+(\omega CR)^2}$;

$$R_Y(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) - \frac{N_0}{4RC}e^{-|\tau|/RC}$$

4—29 $S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2[S_{X_1}(\omega) + S_{X_2}(\omega) + 4\pi m_{X_1} m_{X_2}\delta(\omega)]$

4—30 $R_Y(\tau) = R_X(\tau)$, $E[Y^2(t)] = 10\text{W}$; $R_Z(\tau) = 40\pi^2\cos 100\tau$,

$E[Z^2(t)] = 40\pi^2\text{W}$; $R_0(\tau) = 4\times 10^3\pi^2\cos 100\tau$,

$E[O^2(t)] = 4000\pi^2\text{W}$

4—31 $S_{XY}(\omega)$: 0.5, 0.4794 − j0.1224, 0.4207 − j0.2298

$S_{YX}(\omega)$: 0.5, 0.4794 + j0.1224, 0.4207 + j0.2298

4—32 $E[V(t)] = 1$;

$$S_V(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \frac{2\alpha}{[\omega^4L^2C^2 - (2LC + C^2R^2)\omega^2 + 1][\omega^2 + \alpha^2]}$$

$$S_I(\omega) = \frac{2\alpha C^2\omega^2}{[L^2C^2\omega^4 - (2LC + C^2R^2)\omega^2 + 1][\omega^2 + \alpha^2]}$$

$$S_{VI}(\omega) = \frac{j2\alpha C\omega}{[L^2C^2\omega^4 - (2LC + C^2R^2)\omega^2 + 1][\omega^2 + \alpha^2]}$$

4—35 $S_Y(\omega) = \left|\dfrac{K(\omega)}{1+G(\omega)K(\omega)}\right|^2\{|G(\omega)|^2 S_X(\omega)$

$$+ 2\text{Re}[G(\omega)S_{NX}(\omega)] + S_N(\omega)\}$$

$$S_E(\omega) = |1+G(\omega)K(\omega)|^{-2}\{S_X(\omega) - 2\text{Re}[K(\omega)S_{NX}(\omega)]$$

$$+ |K(\omega)|^2 S_N(\omega)\}$$

式中$K(\omega)$、$G(\omega)$分别是$k(t)$、$g(t)$的傅氏变换，Re[·]表示取实部。

4—38 $H_1^*(\omega)H_2(\omega) = 0$

4—39 $S_{V_1}(\omega) = \dfrac{4\lambda(\alpha^2+\omega^2)}{(4\lambda^2+\omega^2)(4\alpha^2+\omega^2)}$;

$$S_{V_2}(\omega) = \frac{4\lambda\alpha^2}{(4\lambda^2+\omega^2)(4\alpha^2+\omega^2)};$$

$$S_{V_1V_2}(\omega) = \frac{4\lambda\alpha(\alpha+j\omega)}{(4\lambda^2+\omega^2)(4\alpha^2+\omega^2)}, \quad \alpha = \frac{1}{RC},$$

4—41 $F[Y^2(t)] = \dfrac{2\sigma^2}{\beta^2}[\beta t - (1-e^{-\beta t})]U(t)$

4—42 $R_Y(t_1,t_2) = \begin{cases} t_1, & t_2 \geqslant t_1 \\ t_2, & t_2 < t_1 \end{cases}$

4—43 $R_Y(t_1,t_2)=\left\{\frac{\beta\sigma^2}{a(\beta^2-a^2)}(1-e^{-2at_2})\right.$

$-\frac{\sigma^2}{\beta^2-a^2}[1-e^{-(\beta+a)t_2}+e^{-(\beta+a)t_1}$

$\times(e^{(\beta-a)t_2}-1)]\}U(t_1-t_2)+\left\{\frac{\beta\sigma^2}{a(\beta^2-a^2)}\right.$

$\times(1-e^{-2at_1})-\frac{\sigma^2}{\beta^2-a^2}[1-e^{-(\beta+a)t_1}$

$\left.+e^{-(\beta+a)t_2}(e^{(\beta-a)t_1}-1)]\right\}U(t_2-t_1)$,

t_1、$t_2>0$

4—44 $\sigma^2_{iL}(t)=\frac{\alpha s_0}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\beta}{\omega}\right)^2 s_0\left[\frac{1}{\beta}-\frac{\beta}{\beta^2+4\omega^2}\cos2\omega t\right.$

$\left.+\frac{2\omega}{\beta^2+4\omega^2}\sin2\omega t\right]e^{-\beta t}$

$\sigma^2_{iR}(t)=\frac{\beta s_0}{2}+s_0\beta^2 e^{-\beta t}\left\{\frac{2\omega\sin2\omega t-\beta\cos2\omega t}{2(\beta^2+4\omega^2)}\right.$

$+\frac{\beta}{2\omega}\cdot\frac{\beta\sin2\omega t-2\omega\cos2\omega t}{\beta^2+4\omega^2}$

$\left.-\frac{\beta^2}{8\omega^2}\cdot\frac{2\omega\sin2\omega t-\beta\cos2\omega t}{\beta^2+4\omega^2}-\frac{1}{2\beta}-\frac{\beta}{8\omega^2}\right\}$

$E[i_L(t)i_R(t)]=\frac{\alpha\beta^2 s_0}{\omega}e^{-\beta t}\left[\frac{1}{4\omega}+\frac{2\omega\sin2\omega t-\beta\cos2\omega t}{\beta^2+4\omega^2}\right.$

$\left.-\frac{\beta\sin2\omega t+2\omega\cos2\omega t}{2(\beta^2+4\omega^2)}\right]$

当$t\to+\infty$时，$\sigma^2_{iL}=\frac{\alpha s_0}{2}$、$\sigma^2_{iR}=\frac{\beta s_0}{2}$、$i_L(t)$与$i_R(t)$在同一时刻不相关。

4—45 $m_Y(t)=m_{y_0}e^{-\xi pt}\left[\cos qt+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin qt\right]+m_{\dot{y}_0}$

$\times\frac{1}{q}e^{-\xi pt}\sin qt$

$R_Y(t_1,t_2)=E[y_0^2]e^{-\xi p(t_1+t_2)}\left(\cos qt_1+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin qt_1\right)$

$\times\left(\cos qt_2+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin qt_2\right)+E[y_0\dot{y}_0]e^{-\xi p(t_1+t_2)}$

$$\times\frac{1}{q}\left\{\left(\cos qt_1+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin qt_1\right)\sin qt_2+\left(\cos qt_2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin qt_2\right)\sin qt_1\right\}+m_{Y_0}^2\ \frac{1}{q^2}e^{-\xi p(t_1+t_2)}$$

$$\times\sin qt_1\sin qt_2 \qquad t_1、t_2>0$$

$$E[Y^2(t)]=R_Y(t,t)$$

1—46 $E[Y(t)]=e^{-\alpha t}U(t)$；

$$R_Y(t_1,t_2)=e^{-\alpha(t_1+t_2)}U(t_1)U(t_2)$$

$$+\begin{cases}\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha(t_2-t_1)}\cdot(1-e^{-2\alpha t_1}), & t_2>t_1\\ \frac{\alpha}{2}e^{-\alpha(t_1-t_2)}\cdot(1-e^{-2\alpha t_2}), & t_2<t_1\end{cases}$$

$$E[Y^2(t)]=e^{-2\alpha t}U(t)+\frac{\alpha}{2}(1-e^{-2\alpha t})U(t)$$

当$t\to+\infty$时，$E[Y(t)]=0$、$R_Y(t_1,t_2)=\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha(t_2-t_1)}$。

$$E[Y^2(t)]=\frac{\alpha}{2}、\ \alpha=\frac{1}{RC}$$

1—47 信噪比为5.21。

1—48 第一、二系统输出的信噪比各为300.75和10^4

1—49 信噪比为6.25。

4—51 （1） $R_Y(m)=R_X(m)$

4—52 （1）$E[Y(n)]=m_X\sum_{k=0}^{n}h(k)=0$

（2） $R_Y(n_1,n_2)=\begin{cases}\sigma_X^2\sum_{k=0}^{n_1}h(k)h(n_2-n_1+k), & n_2>n_1\\ \sigma_X^2\sum_{k=0}^{n_2}h(k)h(n_1-n_2+k), & n_2<n_1\end{cases}$

（4） $E[Y^2(n)]=\sigma_X^2\ \frac{1-a^{2(n+1)}}{1-a^2}$， $n>0$

1—53 $\sigma_W^2=\frac{(1+ab)\sigma_X^2}{(1-a^2)(1-b^2)(1-ab)}$

4—54 （1） $E[Y(n)]=m_X(1+r)$；$R_Y(m)=\sigma_X^2[r\delta(m+1)+(1+r^2)\delta(m)+r\delta(m-1)]+m_X(1+r)$；严平稳。

（2） $E[Y(n)]=m_X\delta(n)+(1+r)m_XU(n-1)$

$$R_Y(n_1,n_2)=K_Y(n_1,n_2)+E[Y(n_1)]E[Y(n_2)]$$

其中 $K_Y(n_1,n_2)=\begin{cases}\sigma_X^2(1+r^2)\delta(n_2-n_1)+r\sigma_X^2\delta(n_1-n_2+1), & n_2\geqslant n_1\\ \sigma_X^2(1+r^2)\delta(n_1-n_2)+r\sigma_X^2\delta(n_1-n_2+1), & n_2\leqslant n_1\end{cases}$

4—56 $E[Z(n)]=\dfrac{5}{2}$；

$$R_Z(m)=6.25+2.25\delta(m)+\delta(m+1)+\delta(m-1)$$

4—57 （1） $K_U(m)=\sigma_X^2\delta(m)+\sigma_Z^2\dfrac{r^{|m|}}{1-r^2}$；

$$K_W(m)=(1+r^2)\ K_U(m)-rK_U(m+1)-rK_U(m-1)$$

（2） $E[(X(n)-W(n))^2]=r^2\sigma_X^2+\sigma_Z^2$

4—59 $E[Y^2(n)]=\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\sigma_X^2$

4—60 $R_Y(m)=\sigma_X^2a^2(|m|+1)\ \dfrac{1+a^2-|m|}{(a^4-1)^3}a^{-|m|}$；

$$S_Y(\omega)=\frac{(a\sigma_X)^2}{(1+a^2-2a\cos\omega)^2},\quad |\omega|\leqslant\pi$$

4—61 （2） $R_Y(m)=\dfrac{\sigma_X^2}{(a_1-a_2)(1-a_1a_2)}\left(\dfrac{a_1^{|m|+1}}{1-a_1^2}-\dfrac{a_2^{|m|+1}}{1-a_2^2}\right)$

（3） $\begin{bmatrix}R_Y(0) & R_Y(1) & R_Y(2)\\ R_Y(1) & R_Y(0) & R_Y(1)\\ R_Y(2) & R_Y(1) & R_Y(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -b_1\\ -b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_X^2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

4—62 $R_Y(m)=\sigma_X^2(1+a_1^2+a_2^2)\delta(m)+\sigma_X^2(a_1+a_1a_2)\delta(|m|-1)+\sigma_X^2a_2\delta(|m|-2)$

$$S_Y(\omega)=S_Y'(e^{j\omega})=[1+a_1^2+a_2^2+2a_1(1+a_2)\cos\omega+2a_2\cos2\omega]\sigma_X^2$$

4—63 $H(s)=\dfrac{S_{\overline{Y}}(s)}{S_{\overline{X}}(s)}$

4—64 （1） $H(s)=\dfrac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$

（2） $H(s)=\dfrac{\sqrt{3}}{s^2+s+1}$

(3) $H(s)=\dfrac{(s+\sqrt{8})(s+j\sqrt{8})}{(s+1)(s+3)}$

4—65 $H(z)=\sqrt{2}\ \dfrac{z^2+1}{z^2-0.25}$ 或 $H(z)=\sqrt{2}\ \dfrac{z^2-1}{z^2-0.25}$

4—66 $H(j\omega)=\dfrac{j\omega+\sqrt{8}}{j\omega+\sqrt{8}}$ 或 $H(j\omega)=\dfrac{j\omega-\sqrt{8}}{j\omega+\sqrt{3}}$ 或

$H(j\omega)=\dfrac{j\omega+\sqrt{8}}{j\omega-\sqrt{3}}$ 或 $H(j\omega)=\dfrac{j\omega-\sqrt{8}}{j\omega-\sqrt{3}}$

4—67 $H(z)=\dfrac{z+0.4}{z+0.3}$

4—68 (1) $\Delta\omega_e=\dfrac{3}{8}\pi$ (rad/s)

(2) $E[Y^2(t)]=12$(W)

4—69 $\Delta\omega_e=\dfrac{4}{3}\pi$ (rad/s)

4—70 (1) $\Delta\omega_e=\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n-\dfrac{1}{2}\right)}{2a(n-1)!}$，其中$\Gamma(\cdot)$是伽马函数；

(2) $\Delta\omega_n=\dfrac{\pi\mathrm{ch}\left[\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1+\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right]}{\Delta\omega\sqrt{1+\varepsilon^2}\cdot 2n\sin(\pi/2n)}$，其中$\Delta\omega$是系统的3dB带宽。

4—72 $\Delta\omega_e=\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\pi$

4—73 $N_0=1.25\times10^{-8}$W/Hz

4—76 $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\exp\left\{-\dfrac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}$，其中 $m_Y=\dfrac{3}{8}T$

$$\sigma_Y^2=2f_n^2\left\{\frac{I}{4\alpha}+\frac{e^{-\alpha T}-1}{4\alpha^2}+\frac{\alpha T-2+2e^{-\alpha T}}{4(\alpha^2+4\omega_n^2)}\right\}$$

$$\omega_n=\frac{2\pi n}{T}$$

4—78 $h(0)=0$

4—79 $f_{SY}(s,y;t_1,t_1)=[2\pi R_S(0)R_Y(0)(1-r_{SY}^2)]^{-\frac{1}{2}}$

$$\times\exp\left\{-\frac{s^2/R_S(0)-2r_{SY}\cdot sy/[R_S(0)R_Y(0)]^{1/2}+y^2/R_Y(0)}{2(1-r_{SY}^2)}\right\}$$

其中 $R_S(0)=P$、$R_Y(0)=\frac{Pk}{\alpha+k}+\frac{kN_0}{4}$、

$$r_{SY}=\frac{kP/(\alpha+k)}{\left\{\left(\frac{Pk}{\alpha+k}+\frac{kN_0}{4}\right)P\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

4—80 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}}$，其中$\sigma_Y^2=\frac{N_0}{2\alpha}[1-e^{-\alpha T}]$

4—81 (1) $f_Y(y_1;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{Y_t}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_{Y_t}^2}\right\}$，$t>0$

其中$\sigma_{Y_t}^2=\frac{1}{2}[e^{-2t}+1]U(t)$；

(2) $f_Y(y_1,y_2;t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2}(1-r_Y^2)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_Y^2)}\right.$

$$\left.\times\left\{\frac{y_1^2}{\sigma_{Y_1}^2}-2r_Y\frac{y_1y_2}{\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2}}+\frac{y_2^2}{\sigma_{Y_2}^2}\right\}\right\}$$

其中$\sigma_{Y_1}^2=\frac{1}{2}[e^{-2t_1}+1]U(t_1)$、$\sigma_{Y_2}^2=\frac{1}{2}[e^{-2t_2}+1]U(t_2)$、

$$r_Y=\frac{R_Y(t_1,t_2)}{\sigma_{Y_t}}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=e^{-(t_1+t_2)}U(t_1)U(t_2)$$

$$+\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-(t_2-t_1)}[1-e^{-2t_1}], & t_2>t_1\\ \frac{1}{2}e^{-(t_1-t_2)}[1-e^{-2t_2}], & t_2<t_1\end{cases}$$

(3) $f_Y(y_1,t_2|Y(t_1)=y_1)=\frac{1}{\sigma_{Y_2}\sqrt{2\pi(1-r_Y^2)}}$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_Y^2)}\left\{\frac{y_2}{\sigma_{Y_2}}-r_Y\frac{y_1}{\sigma_{Y_1}}\right\}^2\right\}$$

4—82 (1) $P\{Y(0)>y\}=1-\Phi\left(\frac{y}{\sigma_Y}\right)$，$\sigma_Y^2=\frac{1}{\beta}\frac{\sigma_X^2}{\beta+\alpha}$

(2) $P\{Y(0)>y|X(-T)=0\}=1-\Phi\left(\frac{y}{\sigma_0}\right)$，

其中$\sigma_0^2=\sigma_Y^2\left\{1-\frac{\sigma_X}{(\alpha^2-\beta^2)\sigma_Y}\left\{2\alpha e^{-\beta T}-(\alpha+\beta)e^{-\alpha T}\right\}\right\}$

(3) $P\{Y(0)>y|X(T)=0\}=1-\Phi\left(\frac{y}{\sigma_1}\right)$

其中$\sigma_1^2=\sigma_Y^2\left[1-\frac{\sigma_X}{\sigma_Y(\alpha+\beta)}e^{-\alpha T}\right]$

4—83 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right\}$，其中 $\sigma_Y^2=\frac{1-a^2}{1+a^2}\sigma_X^2$

第五章

5—5 $\omega_0\geqslant\frac{\pi}{\tau}$

5—6 复包络$e^{jm(t)}$；包络为1。

5—10 $S_W(\omega)=S_X(\omega+\omega_0)U(-\omega-\omega_0)+S_X(\omega-\omega_0)U(\omega-\omega_0)$

5—11 $R_X(\tau)$的预包络为$\widetilde{R}_X(\tau)=R_a(\tau)e^{j\omega_0\tau}$，包络为$R_a(\tau)$。

5—12 (1) $E[X^2(t)]=\frac{2P\Delta\omega}{\pi^2}$；

(2) $S_a(\omega)=\begin{cases}2P\cos\pi\omega/\Delta\omega, & |\omega|<\frac{\Delta\omega}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(3) $R_{ab}(\tau)=0$；(4) 正交、不相关。

5—13 (1) $E[X^2(t)]=\frac{5}{\pi}$

(2) $S_a(f)=\begin{cases}2, & |f|\leqslant1\\ 3-|f|, & 1\leqslant|f|\leqslant2\\ 1, & 2\leqslant|f|\leqslant3\\ 4-|f|, & 3\leqslant|f|\leqslant4\end{cases}$

(3) $S_{ab}(f)=j[B(-f)-B(f)]$

其中 $B(f)=\begin{cases}f-1, & 1\leqslant f\leqslant2\\ 1, & 2\leqslant f\leqslant3\\ 4-f & 3\leqslant f\leqslant4\end{cases}$

(4) 不正交、相关。

5—14 (1) $S_a(\omega)=S_b(\omega)=\begin{cases}\frac{P}{\omega_2-\omega_1}|\omega|, & |\omega|\leqslant\omega_2-\omega_1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

（2）$S_a(\omega)=S_b(\omega)=\begin{cases}P\left[1-\dfrac{|\omega|}{\omega_2-\omega_1}\right], & |\omega|\leqslant\omega_2-\omega_1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

（3）$S_a(\omega)=S_b(\omega)=\begin{cases}P, & |\omega|\leqslant\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

（4）在上述三种情况下，分别当 $\tau=\dfrac{k}{4}$、$\tau=\dfrac{k+1}{8}$、

$\tau=\dfrac{k+1}{4}$（$k=0,1,2,\cdots$）时，$a(t)$与$b(t)$互不相关；否则，$a(t)$和$b(t)$均相关。

5—15 （1）$S_a(f)=S_b(f)=\begin{cases}N_0/2, & |f|\leqslant 4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$$R_a(\tau)=R_b(\tau)=4N_0\frac{\sin 8\pi\tau}{8\pi\tau}$$

$$S_{ab}(f)=\begin{cases}\mathrm{j}\dfrac{N_0}{2}, & -4\leqslant f\leqslant 0\\ -\mathrm{j}\dfrac{N_0}{2}, & 0\leqslant f\leqslant 4\end{cases}\qquad R_{ab}(\tau)=\frac{N_0}{\pi\tau}\sin^2 4\pi\tau$$

（2）$S_a(f)=S_b(f)=\begin{cases}N_0/2, & |f|\leqslant 4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$R_a(\tau)=R_b(\tau)=4N_0\frac{\sin 8\pi\tau}{8\pi\tau}$$

$$S_{ab}(f)=\begin{cases}-\mathrm{j}\,N_0/2, & -4\leqslant f\leqslant 0\\ \mathrm{j}\,N_0/2, & 0\leqslant f\leqslant 4\end{cases}$$

$$R_{ab}(\tau)=-\frac{N_0}{\pi\tau}\sin^2 4\pi\tau$$

（3）$S_a(f)=S_b(f)=\begin{cases}N_0, & |f|\leqslant 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$R_a(\tau)=R_b(\tau)=\frac{N_0}{\pi\tau}\sin 4\pi\tau$$

$$S_{ab}(f)=0$$

5—16

$$S_X(\omega)=\begin{cases}\dfrac{P}{2\omega_1}[|\omega-\omega_0|+|\omega+\omega_0|], & |\omega\pm\omega_0|\leqslant\omega_1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

5—17 （1） $S_p(f)=S_q(f)=\frac{N_0}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B-2f_d}\right)$

$$+\frac{N_0}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B+2f_d}\right)$$

（2） $R_{pq}(\tau)=-\frac{N_0}{\pi\tau}\sin 2\pi f_d\tau\cdot\sin\pi B\tau$

当 $\tau=\frac{k}{B}$ 或 $\tau=\frac{k}{2f_d}$ （$k=0,1,2,\cdots$）时，$p(t)$与$q(t)$不相关；否则，线性相关。同一时刻$p(t)$与$q(t)$独立。

5—19 $f_{A_t}(a)=\frac{a}{N_0}I_0\left(\frac{m_tR_t}{N_0}\right)\exp\left\{-\frac{a^2+m_t^2}{2N_0}\right\}$，$a\geqslant 0$

其中a为$A(t)$在t时刻的取值，$A(t)=\sqrt{[m(t)+a(t)]^2+b^2(t)}$，

5—22 均值$=2000\sqrt{2\pi N_0}$ (V)，方差$\approx 6.88\times 10^6N_0$ (W)

5—24 $E[Z^2(t)]=\frac{A^2}{4}\sigma_X^2$

5—25 （1） $R_X(\tau)=e^{-\tau^2}\cos\omega_0\tau$、$R_Z(\tau)=e^{-\tau^2}\cos\omega_0\tau$

（2） $E[Y(t)]=0$、$\sigma_Y^2=2+\omega_0^2$、

$$R_Y(\tau)=(2-4\tau^2+\omega_0^2)e^{-\tau^2}\cos\omega_0\tau-4\tau\omega_0e^{-\tau^2}\sin\omega_0\tau$$

（3） 高斯分布

5—27 $f_Z(z)=\frac{2\pi}{N_0\Delta f}\exp\{(-\pi/N_0\Delta f)\,z\}$

5—29 $f_Z(z)=0.5\left(\frac{z}{\lambda}\right)^l\exp\{-(\lambda+z)/2\}I_p(\sqrt{z\lambda})$

其中$l=(M+N-2)/4$、$p=(M+N)/2-1$

第六章

6—3 （1） $f_Y(y_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma y_t}\exp\left\{-\frac{\left(\ln\frac{y_t}{b}-m\right)^2}{2\sigma^2}\right\}U(y_t)$

（2） $E[Y(t)]=be^{(m+\sigma^2/2)}$，

$$D[Y(t)]=b^2e^{(2m+\sigma^2)}[e^{\sigma^2}-1]$$

6—4 $R_Y(\tau)=4\exp[R_X(\tau)+R_X(0)]$

6—5 $f_Y(y) = \frac{1}{2}\delta(y+a) + y[U(y) - U(y-1)]$

6—6 $E[Y(t)] = I\exp\left\{\frac{a^2}{2}R_X(0)\right\}$;

$R_Y(\tau) = I^2\exp\{a^2\sigma_X^2(1+e^{-\alpha|\tau|})\}$;

$\sigma_Y^2 = I^2\exp\{a^2\sigma_X^2\}\cdot\exp\{a^2\sigma_X^2 - 1\}$

6—7 $f_Y(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\}U(y)$;

$$f_Y(y_1, y_2; \tau) = \frac{1}{\pi(1-r_X^2)^{1/2}\sigma_X^2}\left\{\exp\left\{-\frac{y_1^2 - 2r_X y_1 y_2 + y_2^2}{2(1-r_X^2)\sigma_X^2}\right\}\right.$$
$$\left. + \exp\left\{-\frac{y_1^2 + 2r_X y_1 y_2 + y_2^2}{2(1-r_X^2)\sigma_X^2}\right\}\right\}U(y_1)U(y_2)$$

6—8
$$\begin{cases} f_Y(y) = \dfrac{K\sigma_L}{\sigma}\exp\left\{\left[\dfrac{1}{\sigma_L^2} - \dfrac{1}{\sigma^2}\right]\dfrac{x^2}{2}\right\} \\ y = a + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}K\sigma_L}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2\sigma_L^2}\,dt \end{cases}$$

6—9 $g(x) = (b-a)\,\Phi\left(\frac{x}{\sigma_X}\right) + a$

6—10 $R_Y(\tau) = \frac{2}{\pi}\arcsin\left[\frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}\right]$

6—20 $E[Y(t)] = A^2 + (N_0B)^2$; $R_Y(\tau) = 2BN_0A^2 + (N_0B)^2 + 2A^2[1 +$

$R_m(\tau)]R_n(\tau)\cos\omega_0\tau + 2R_n^2(\tau) + A^4\left(1 + \frac{1}{2}\cos 2\omega_0\tau\right)\left[R_m(\tau)\right.$

$\left. + \frac{1}{2}R_m^2(\tau) + 1\right]$, 其中$R_m(\tau) = \frac{\sin(\tau/2)}{\tau/2}$,

$R_n(\tau) = N_0B\,\frac{\sin(B\tau/2)}{B\tau/2}\cos\omega_0\tau$

6—22 (2) $\sigma_Z^2 \approx \frac{A^2}{WT}$

6—23 $R_Y(\tau) = a^2\left[\left(\frac{N_0}{4RC}\right)^2 + \frac{N_0}{2RC}\exp(-2|\tau|/RC)\right]$,

$S_Y(\omega) = a^2\left[\frac{\pi N_0^2}{8R^2C^2}\delta(\omega) + \frac{2N_0}{4 + (RC)^2\omega^2}\right]$

6—24 (1) $R_{YZ}(\tau)=N_0\int_{-\infty}^{\infty}H_1(f)H_2(f)e^{j2\pi f\tau}\,df$

(2) $R_Y(\tau)=\iint_{-\infty}^{\infty}|H_3(f)|^2[R_Y(\tau+x)R_Z(\tau+x)+R_{YZ}^2(0)$

$+R_{YZ}(\tau+x)R_{YZ}(-\tau-x)]e^{j2\pi fx}\,dx\,df$

6—25 $R_Y(\tau)\approx 4+4\sigma^2+\sigma^4+4R_X(\tau)+2R_X^2(\tau)$

6—26 $R_Y(\tau)\approx 4+2a^2+\frac{a^4}{4}+(4+a^2)R_N(0)+R_N^2(0)+2a^2\cos\omega_0\tau$

$+\frac{a^4}{8}\cos 2\omega_0\tau+(4+2a^2\cos\omega_0\tau)R_N(\tau)+2R_N^2(\tau)$

6—27 $E[Y(t)]=0$; $R_Y(\tau)=[a_1^2+6a_1a_3R_X(0)+9a_3^2R_X^2(0)]R_X(\tau)$

$+6a_3^2R_X^2(\tau)$

6—28 低频分量的均值为5、方差为16。

6—31 $E[Y(t)]\approx 1$, $\sigma_Y^2\approx 0.28$

6—32 $\left(\frac{S}{N}\right)_0=\frac{a^4+16a^2N_0\Delta f}{32(N_0\Delta f)^2}$; $\left(\frac{S}{N}\right)_0=\frac{1}{2}\left(\frac{S}{N}\right)_i^2+2\left(\frac{S}{N}\right)_i$

6—33 $\left(\frac{S}{N}\right)_0=\frac{A^2E[X^2(t)]}{2\Delta fN_0}$; $\left(\frac{S}{N}\right)_0=2\left(\frac{S}{N}\right)_i$

6—34 $\left(\frac{S}{N}\right)_0=\frac{A^2E[X^2(t)]}{4N_0\Delta f}$

6—35 $\left(\frac{S}{N}\right)_0=\frac{A^2\{1+mE[X^2(t)]\}}{2N_0\Delta f}$

第七章

7—3 是。 $p_{i,i+1}=p$

$p_{i,i-1}=q=1-p$ $\quad i\geq 1,\ i\in I$

$p_{ij}=0\quad j\neq i+1,i-1,j\in I,i\geq 1,i\in I$

$p_{00}=1$

7—4 是。 $p_{i,i+1}=p$

$p_{i,i-1}=q=1-p$ $\quad i\geq 1,i\in I$

$p_{ij}=0\quad j\neq i+1,i-1,i\geq 1,i,j\in I$

$p_{01}=p$

$p_{00}=q=1-p$

$p_{0j}=0 \quad j\neq 0,1$

7—5 (1)
$$P(2)=\begin{bmatrix} q & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \end{bmatrix},$$

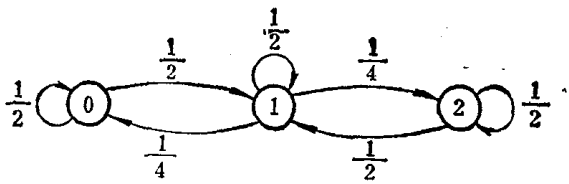
(2)
$$P(n)=\begin{cases} P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & n \text{ 为奇数} \\ P(2)=\begin{bmatrix} q & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & p \end{bmatrix}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

7—6
$$P=\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad P(2)=\begin{bmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{bmatrix}$$

$$P(3)=\begin{bmatrix} 0.583 & 0.417 \\ 0.556 & 0.444 \end{bmatrix}, \quad P(4)=\begin{bmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{bmatrix}$$

$p_{12}(2)=0.39$, $p_{11}(3)=0.583$, $p_{22}(4)=0.4332$

7—7 因三个状态均相通，故此马氏链是不可约的。状态传递图如图题解7—7所示。



图题解 7—7

7—8 $f_{00}(1)=\frac{1}{2}$, $f_{00}(2)=\frac{1}{6}$, $f_{00}(3)=\frac{1}{9}$, $f_{01}(1)=\frac{1}{2}$,

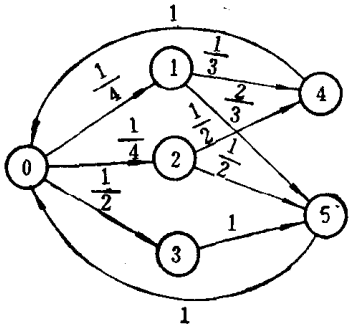
$f_{01}(2)=\frac{1}{4}$, $f_{01}(3)=\frac{1}{8}$

7—9 $f_{00}(1)=p_1$, $f_{00}(2)=0$, $f_{00}(3)=q_1q_2q_3$, $f_{01}(1)=q_1$,

$f_{01}(2)=p_1q_1$, $f_{01}(3)=p_1^2q_1$

7—10 该链的状态传递图如图题解7—10所示。此链具有周期性，其周期 $t=3$。

7—12 此链共有三个状态；$m=1$ 时，此链是遍历的；



图题解7—10

$$P(2)=\begin{Bmatrix}\frac{15}{36} & \frac{13}{36} & \frac{8}{36}\\ \frac{7}{18} & \frac{7}{18} & \frac{4}{18}\\ \frac{7}{18} & \frac{13}{36} & \frac{9}{36}\end{Bmatrix};\quad \lim_{n\to\infty} p_{1j}(n)=\frac{1}{3}$$

7—13 此链共有三个状态；$m=2$ 时，此链具有遍历性；$p_1=8/27$，$p_2=9/27$，$p_3=10/27$

7—14 $m=1$时，此链具有遍历性；$p_1=21/62$，$p_2=23/62$，$p_3=18/62$

7—15 $m=4$ 时，此链具有遍历性；$p_1=p_5=1/11$，$p_2=p_3=p_4=3/11$

7—19 $m_X=\frac{\lambda}{\alpha}$，$S_X(\omega)=2\pi\frac{\lambda^2}{\alpha^2}\delta(\omega)+\frac{\lambda}{\alpha^2+\omega^2}$，$\sigma_X^2=\frac{\lambda}{2\alpha}$

7—20 $m_X(t)=\frac{1}{2}=m_X$，$R_X(t,t_2)=\frac{1}{4}[1+e^{-2\lambda|\tau|}]=R_X(\tau)$，

$K_X(\tau)=\frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}$，$S_X(\omega)=\frac{\pi}{2}\delta(\omega)+\frac{\lambda}{4\lambda^2+\omega^2}$

7—24 $R_Y(t_1,t_2)=\alpha^2t_2(t_1+2t_2)$，当$t_1>t_2$时。

〔附录A〕 留数定理及其应用

一、留数定理

设$B(s)$是复变量s的函数，且其在绕原点的简单闭曲线c反时针方向上和c内部除了n个极点$s=p_i$，$i=1,2,\cdots,n$外解析，则

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c B(s)\,ds=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}[B(s),s=p_i,\ \text{在}c\text{内部的}p_i] \tag{A-1}$$

式中

1．如果p为$B(s)$的一阶极点，那末

$$\mathrm{Res}[B(s),s=p]=[(s-p)B(s)]|_{s=p} \tag{A-2}$$

2．如果p为$B(s)$的二阶极点，那末

$$\mathrm{Res}[B(s),s=p]=\frac{d}{ds}[B(s)(s-p)^2]|_{s=p} \tag{A-3}$$

3．如果p为$B(s)$的m阶极点，那末

$$\mathrm{Res}[B(s),s=p]=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}[B(s)(s-p)^m]|_{s=p} \tag{A-4}$$

4．如果分式函数$B(s)=P(s)/Q(s)$，$P(s)$和$Q(s)$在点p解析，p是$Q(s)$的一阶零点，而$P(p)\neq 0$，即p是$B(s)$的一阶极点，那末

$$\mathrm{Res}[B(s),s=p]=\left.\frac{P(s)}{\dot{Q}(s)}\right|_{s=p}\quad(\dot{Q}(s)\text{为}Q(s)\text{的导数}) \tag{A-5}$$

二、用留数定理计算反傅里叶变换

设有傅里叶变换对

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt \tag{A-6}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \qquad (A-7)$$

并设拉普拉氏变量$s=\sigma+j\omega$。在式（A—6）和（A—7）中令$j\omega=s$，得一对双边拉普拉斯变换

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-st}\,dt \qquad (A-8)$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)\,e^{st}\,ds \qquad (A-9)$$

我们关心的是式（A—7）或式（A—9）的求取，根据留数定理得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)\,e^{st}\,ds$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi j}\oint_{c_L}F(s)\,e^{st}\,ds=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st},s=p_i,p_i\text{为}F(s)\text{在}c_L\text{内的极点}],\ t\geqslant 0 & (A-10)\\ \dfrac{1}{2\pi j}\oint_{c_R}F(s)\,e^{st}\,ds=-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st},s=p_i,p_i\text{为}F(s)\text{在}c_R\text{内的极点}],\ t<0 & (A-11)\end{cases}$$

式中c_L和c_R均为闭曲线，如图$A.1$所示。

〔**例$A.1$**〕 设平稳随机过程$X(t)$的功率谱密度

$$S_X(\omega)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2},\quad 0<\alpha<1$$

试求$X(t)$的自相关函数。

解：$S_X(j\omega)=S_X(\omega)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}=\dfrac{2\alpha}{(j\omega+\alpha)(-j\omega+\alpha)}$

于是

$$S_X(s)=\frac{2\alpha}{(s+\alpha)(\alpha-s)}$$

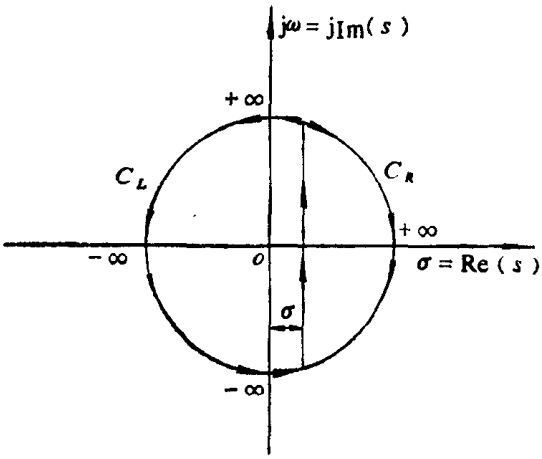


图 $A.1$ 积分路线

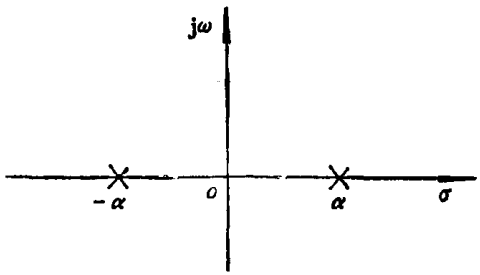


图 $A.2$ $S_X(s)$的极点图

其极点在s面的位置如图$A.2$所示。

计算$\tau>0$时的留数。根据式（A—10）得

$$R_X(\tau)=\mathrm{Res}[S_X(s)e^{s\tau},s=-\alpha]=\left.\frac{2\alpha e^{s\tau}(s+\alpha)}{(s+\alpha)(\alpha-s)}\right|_{s=-\alpha}$$

$$=e^{-\alpha\tau}$$

对于$\tau<0$的情况，有

$$R_X(\tau)=-\mathrm{Res}[S_X(s)e^{s\tau},s=\alpha]=-\left.\frac{2\alpha e^{s\tau}(s-\alpha)}{(s+\alpha)(\alpha-s)}\right|_{s=\alpha}$$

$$=e^{\alpha\tau}$$

综合以上两种结果，有

$$R_X(\tau)=\exp(-\alpha|\tau|),\quad -\infty<\tau<\infty$$

三、用留数定理计算反Z变换

设有双边Z变换对

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k} \qquad (A-12)$$

$$f(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c F(z)z^{k-1}dz \qquad (A-13)$$

式中c为在被积函数收敛域内绕原点反时针方向的一条简单闭曲线。根据留数定理得

$$f(k)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c F(z)z^{k-1}dz$$

$$=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1},z=p_i,p_i为F(z)z^{k-1}\\ \qquad 在c内的极点],\ k\geqslant 0 \qquad (A-14)\\ \sum_{i=1}^{m}\mathrm{Res}[F(z^{-1})z^{-k-1},z=p_i^{-1},\ p_i为F(z)\\ \qquad 在c外的极点],\ k<0\end{cases}$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1},z=p_i,p_i为F(z)z^{k-1}$$

$$在c外的极点],\ k<0 \qquad (A-15)$$

〔例$A.2$〕 已知平稳离散时间随机信号$X(n)$的功率谱密度

$$S_X(\omega)=\frac{2(1-\rho^2)}{(1+\rho^2)-2\rho\cos\omega},\quad |\omega|\leqslant\pi$$

试求$X(n)$的自相关函数 $(0<\rho<1)$。

解： 先说明由平稳离散时间随机信号的功率谱密度$S(\omega)$求其自相关函数的一般方法。

已知

$$S(\omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R(m)e^{-j\omega m} \qquad (A-16)$$

$$R(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega)\,e^{j\omega m}d\omega \qquad (A-17)$$

令 $S(e^{j\omega})=S(\omega)$，用$z=e^{j\omega}$代换式(A—16)和式(A—17)中的$e^{j\omega}$，得

$$S(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R(m)z^{-m} \qquad (A-18)$$

$$R(m)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c}S'(z)z^{m-1}dz \qquad (A-19)$$

其中$c=\{|z|=1\}$为一单位圆。利用式(A—14)和(A—15)可求得式(A—19)的解，即为平稳离散随机信号的自相关函数。

下面求解该题。

$$S'_x(e^{j\omega})=S_x(\omega)=\frac{2(1-\rho^2)}{(1+\rho^2)-\rho[e^{j\omega}+e^{-j\omega}]}$$

于是

$$S'_x(z)=\frac{2(1-\rho^2)}{(1+\rho^2)-\rho(z+z^{-1})}$$

$$=-2(\rho^{-1}-\rho)\ \frac{z}{(z-\rho)(z-\rho^{-1})}$$

上式的z平面零极图如图$A.3$所示。

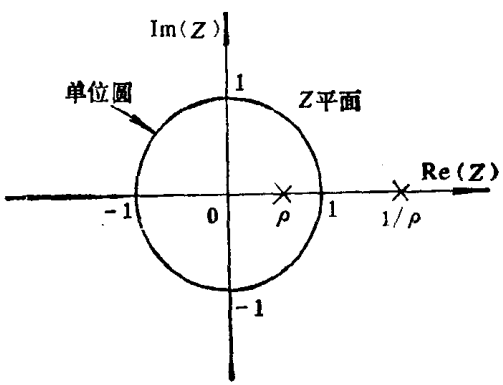


图 $A.3$ $S_x(z)$零极点图

对于$m \geqslant 0$，我们有

$$R_x(m) = \operatorname{Res}[S_x'(z) z^{m-1};\ z=\rho]$$

$$= -2\ (\rho^{-1}-\rho)\ \frac{z^m}{(z-\rho^{-1})}\Bigg|_{z=\rho} = 2\rho^m$$

对于$m < 0$，得

$$R_x(m) = -\operatorname{Res}[S_x'(z) z^{m-1}; z=\rho^{-1}]$$

$$= 2(\rho^{-1}-\rho)\frac{z \cdot z^{m-1}}{(z-\rho)(z-\rho^{-1})} \cdot (z-\rho^{-1})\Bigg|_{z=\rho^{-1}}$$

$$= 2\rho^{-m}$$

综合以上两种结果，得

$$R_x(m) = 2\rho^{|m|},\quad -\infty < m < +\infty$$

〔附录B〕拉氏变换和Z变换的平方积分表

表 B—1 拉普拉斯变换平方积分表

$$I_n = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} H(s)H(-s)ds$$

$$H(s) = \frac{c(s)}{d(s)} = \frac{c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + \cdots + c_1 s + c_0}{d_n s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_1 s + d_0}$$

$$I_1 = \frac{c_0^2}{2d_0 d_1}$$

$$I_2 = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2}$$

$$I_3 = \frac{c_2^2 d_0 d_1 + (c_1^2 - 2c_0 c_2) d_0 d_3 + c_0^2 d_2 d_3}{2d_0 d_3 (d_1 d_2 - d_0 d_3)}$$

$$I_4 = \frac{c_3^2(-d_0^2 d_3 + d_0 d_1 d_2) + (c_2^2 - 2c_1 c_3) d_0 d_1 d_4 + (c_1^2 - 2c_0 c_2) d_0 d_3 d_4 + c_0^2(-d_1 d_4^2 + d_2 d_3 d_4)}{2d_0 d_4(-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)}$$

表 B—2 Z变换平方积分表

$$In=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}H(z)H(z^{-1})z^{-1}\mathrm{d}z$$

其中 $$H(z)=\frac{c(z)}{d(z)}$$

$$c(z)=c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots\cdots+c_0$$

$$d(z)=d_nz^n+d_{n-1}z^{n-1}+\cdots\cdots+d_0$$

$$I_1=\frac{(c_1^2+c_0^2)d_1-2c_1c_0d_0}{d_1(d_1^2-d_0^2)}$$

$$I_2=\frac{(c_2^2+c_1^2+c_0^2)(d_2+d_0)d_2-2(c_2+c_0)c_1d_2d_1+2c_2c_0(d_1^2-d_0d_2-d_0^2)}{d_2[(d_2^2-d_0^2)(d_2+d_0)-(d_2d_1-d_1d_0)d_1]}$$

$$I_3=\frac{d_3B_0A_0-d_3B_1A_1+d_3B_2A_2-B_3A_3}{d_3[(d_3^2-d_0^2)A_0-(d_3d_2-d_1d_0)A_1+(d_3d_1-d_2d_0)A_2]}$$

其中 $$B_0=c_3^2+c_2^2+c_1^2+c_0^2$$

$$B_1=2(c_3c_2+c_2c_1+c_1c_0)$$

$$B_2=2(c_3c_1+c_2c_0)$$

$$B_3=2c_3c_0$$

$$A_0=d_3(d_3+d_1)-d_0(d_2+d_0)$$

$$A_1=d_3d_2-d_1d_0$$

$$A_2=d_2(d_2+d_0)-d_1(d_3+d_1)$$

$$A_3=(d_2-d_0)[(d_2+d_0)^2-(d_3+d_1)^2]+d_3^2(d_2+d_0)-d_3d_0(d_3+d_1)$$

$$I_4=\frac{d_4B_0A_0-d_4B_1A_1+d_4B_2A_2-d_4B_3A_3+B_4A^4}{d_4[(d_4^2-d_0^2)A_0-(d_4d_3-d_1d_0)A_1+(d_4d_2-d_2d_0)A_2-(d_4d_1-d_3d_0)A_3]}$$

其中 $$B_0=c_4^2+c_3^2+c_2^2+c_1^2+c_0^2$$

$$B_1=2(c_4c_3+c_3c_2+c_2c_1+c_1c_0)$$

$$B_2=2(c_4c_2+c_3c_1+c_2c_0)$$

$$B_3=2(c_4c_1+c_3c_0)$$

$$B_4=2c_4c_0$$

$$A_0=d_4(d_4+d_2)(d_4+d_0)-d_4d_1(d_3+d_1)+d_0[d_3^2+d_3d_1-(d_2+d_0)(d_4+d_0)]$$

$$A_1=d_4d_3(d_4+d_0)-d_4d_2d_1+d_0[d_3d_2-d_1(d_4+d_0)]$$

$$A_2=d_4d_3(d_3+d_1)-d_4d_2(d_4+d_2)+d_0[d_2(d_2+d_0)-d_1(d_3+d_1)]$$

$$A_3=d_1A_0-d_2A_1+d_3A_2$$

$$A_4=-d_0A_0+d_1A_1-d_2A_2+d_3A_3$$

参考文献

〔1〕 朱华，黄辉宁等编。《随机信号分析》。北京：北京理工大学出版社，1991年。

〔2〕 吴祈耀编。《随机过程》。北京：国防工业出版社，1984年。

〔3〕 A Papoulis. "Probability, Random Variables and Stochastic Processes". McGraw-Hill, 1965 & 1984.

〔4〕 P Z Peebles, Jr.."Probability, Random Variables and Random Signal Principles". McGraw-Hill, 1980.

〔5〕 P Z Peebles. Jr.."Communication System Principles". Addison-Wesley, 1976.

〔6〕 G R Cooper and C D McGillem. "Probabilistic Methods of Signal and System Analysis". Holt, Rinehart and Winston Inc., 1971 & 1986.

〔7〕 浙江大学数学系编。《概率论与数理统计》。北京：人民教育出版社，1979年。

〔8〕 复旦大学编。《概率论第三册，随机过程》。北京：人民教育出版社，1981年。

〔9〕 陆大絟编著。《随机过程及其应用》。北京：清华大学出版社，1986年。

〔10〕 A D 惠伦著，刘其培等译。《噪声中信号的检测》。北京：科学出版社，1977年。

〔11〕 B E 格穆尔曼著，朱秀娟等译。《概率统计解题指南》。长沙：湖南科学技术出版社，1983年。

[12] A V Oppenheim and R W Schafer. "Digital Signal Processing". Prentice-Hall, 1975.

[13] R G Brown. "Introduction To Random Signal Analysis and Kalman Filtering". John Wiley & Sons, 1983.

[14] S J Orfanidis. "Optimum Signal Processing: An Introduction". Macmillan, 1985.

[15] W B Davenport, Jr. and W L Root. "An Introduction to the Theory of Random Signals and noise". McGraw-Hill, 1958.

[16] R M Gray and L D Davisson. "Random Processes: A Mathematical Approach for Engineers". Prentice-Hall, 1986.

[17] N Mohenty. "Random signals Estimation and Identification——Analysis and Applications". Van nostrand Reinhold Company Inc., 1986.

[18] H Urkowitz. "Signal Theory and Random Processes". Artech House, 1983.

[19] R E Mortensen. "Random Signals and Systems". John Wiley & Sons, 1987.

[20] B P Lathi. "Modern Digital and Analog Communication Systems". CBS College Publishing, 1983.

[21] K Sam Shanmugam. "Digital and Analog Communication Systems". John Wiley & Sons, 1979.

[22] H Stark/F B Tuteur. "Modern Electrical Communications——Theory and Systems". Prentice-Hall, 1979.

[23] S Haykin. "Communication Systems", Second Edition. John Wiley & Sons, 1983.

〔24〕 N S Jayant and P noll. "Digital coding of Waveforms–Principles and Applications to Speech and video". Prentice-Hall, 1984.

〔25〕 K J Åström. "Introduction to Stochastic control Theory". Academic Press, 1970.

〔26〕 H J Blinchikoff & A I Zverev. "Filtering in the Time and Frequency Domains". John Wiley & Sons, 1976.

[General Information]
书名=随机信号分析解题指南
作者=李永庆 梅文博编
页数=324
SS号=10534814
DX号=
出版日期=1990年12月第1版
出版社=北京理工大学出版社

书名
版权
目录
目录
第一章概率论
Ⅰ．本章要点
Ⅱ．基本内容与例解
一、概率简述
二、随机变量及其概率分布
三、多维随机变量及其概率分布
四、随机变量函数的分布
五、随机变量的数字特征
六、随机变量的特征函数
Ⅲ．习题
第二章随机过程
Ⅰ．本章要点
Ⅱ．基本内容与例解
一、随机过程的基本概念及其统计特性
二、随机过程的微分与积分
三、平稳随机过程和遍历过程
四、随机过程的联合概率分布和互相关函数
五、复随机过程
六、离散时间随机过程
七、正态随机过程
Ⅲ．习题
第三章平稳随机过程的谱分析
Ⅰ．本章要点
Ⅱ．基本内容与例解
一、随机过程的谱分析
二、平稳随机过程功率谱密度的性质
三、平稳随机过程的功率谱密度与自相关函数之间的关系
四、离散时间随机过程的功率谱密度

五、互谱密度
六、白噪声
Ⅲ、习题
第四章随机信号通过线性系统的分析
Ⅰ．本章要点
Ⅱ．基本内容与例解&11
一、线性系统输出－输入统计特性之间的关系
二、等效噪声带宽、平均功率和信噪比的计算
三、ARMA,MA和AR时间序列信号模型
四、线性系统输出端随机信号概率密度的计算
Ⅲ、习题
第五章窄带随机过程
Ⅰ．本章要点
Ⅱ．基本内容与例解
一、希尔伯特变换、解析信号与解析过程
二、窄带随机过程
三、窄带高斯随机过程包络和相位的概率密度
Ⅲ．习题
第六章随机信号通过非线性系统的分析
Ⅰ．本章要点
Ⅱ．基本内容与例解
一、无惰性非线性系统输出概率密度的计算
二、计算非线性系统输出统计特性的各种方法
三、非线性系统输出信噪比的计算
Ⅲ．习题
第七章几种常用的随机过程
Ⅰ．本章要点
Ⅱ．基本内容与例解
一、马尔可夫过程
二、独立增量过程
三、独立随机过程
Ⅲ．习题
综合练习

习题答案
〔附录A〕留数定理及其应用
〔附录B〕拉氏变换和Z变换的平方积分表
参考文献